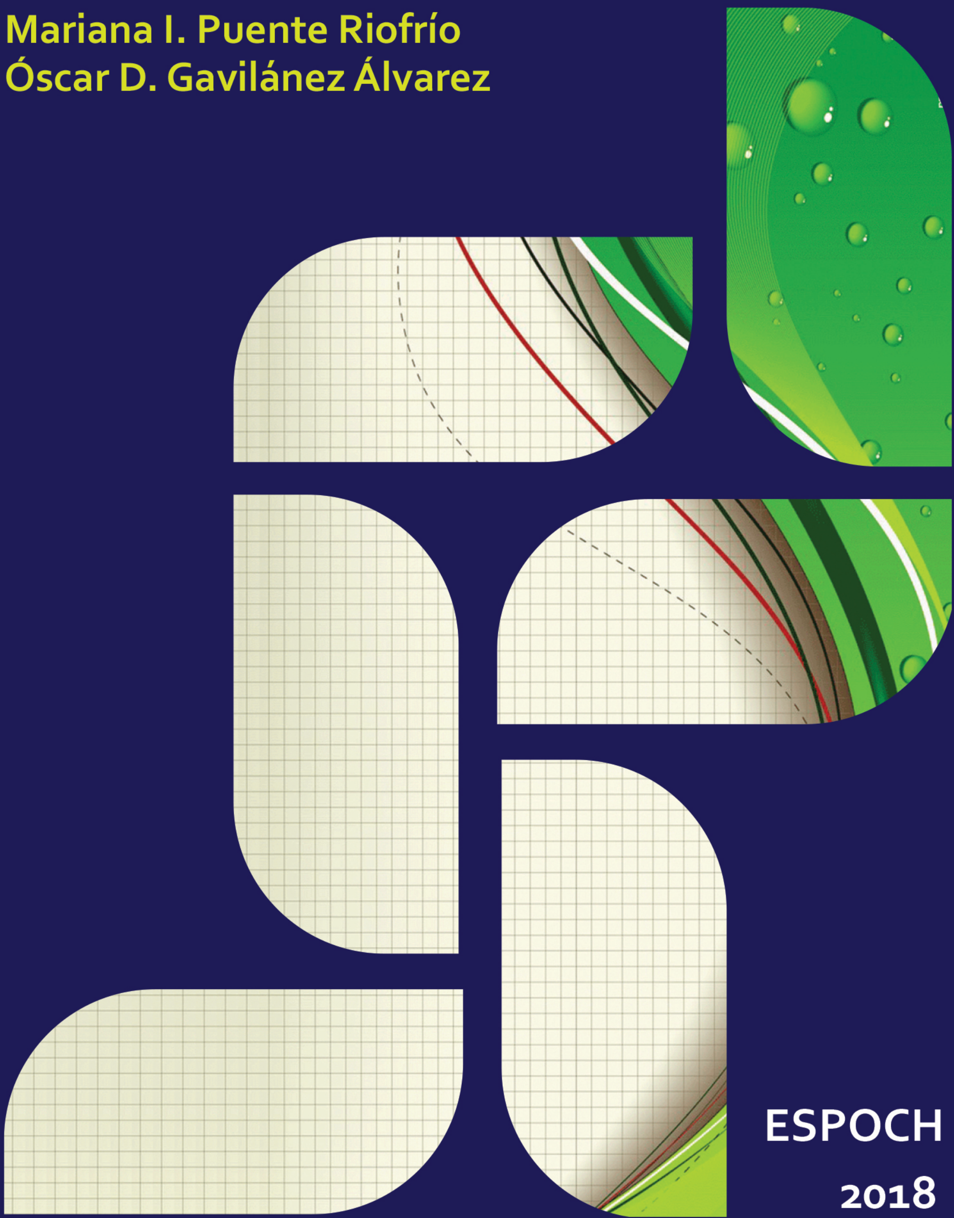
Programación lineal para la toma de decisiones

Mariana I. Puente Riofrío
Óscar D. Gavilánez Álvarez



ESPOCH
2018

PROGRAMACIÓN LINEAL PARA LA TOMA DE DECISIONES

PROGRAMACIÓN LINEAL PARA LA TOMA DE DECISIONES

Mariana Isabel Puente Riofrío

Óscar Danilo Gavilánez Álvarez

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Fundada en 1972

Riobamba - Ecuador

PROGRAMACIÓN LINEAL PARA LA TOMA DE DECISIONES

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (3) 2 998200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 519.85
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones
83 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-30-840-5
1. Matemáticas
2. Programación matemática
3. Programación lineal

CONTENIDO GENERAL

INTRODUCCIÓN

La programación lineal, como elemento fundamental de la investigación de operaciones ha logrado un importante desarrollo científico a escala mundial, pues es aplicable a cualquier empresa para solucionar problemas de optimización de sus recursos.

Este libro es práctico, pues incluye casos de aplicación que permiten al lector utilizar de manera inmediata los conocimientos adquiridos. El contenido se basa en el aprendizaje significativo, ya que dispone de conceptos claves y casos prácticos desarrollados.

La obra tiene como principal objetivo dar a conocer los componentes en que se basa el aprendizaje de programación lineal, constituyéndose en una fuente de consulta ideal para estudiantes, básicamente de carreras administrativas con un enfoque a la toma de decisiones empresariales y de todas las carreras en general.

El texto contiene cinco capítulos. El primero hace referencia a las generalidades de programación lineal; en los capítulos dos, tres y cuatro, se desarrolla el modelo de programación lineal mediante métodos de resolución como el método gráfico y el método Simplex. Al finalizar la obra, se abarca el tema de método de transporte que incluye los métodos de inicialización y optimización.

1. GENERALIDADES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Objetivo del capítulo

Aportar conocimientos generales de la estructura y las suposiciones en los modelos de programación lineal.

1.1. Introducción

La programación lineal tuvo su origen después de la Segunda Guerra Mundial. En 1947, Geoge Dantzing desarrolló investigaciones y aplicaciones para resolver problemas de programación lineal en distintos casos de operación militar. Desde su surgimiento, esta herramienta se utiliza para la resolución de problemas de optimización en diferentes áreas.

La programación lineal es una herramienta aplicable a diversos campos; en la actualidad, las empresas enfrentan problemas de todo tipo, mucho de los cuales ponen en riesgo su estabilidad económica y permanencia en el mercado, por lo que los empresarios buscan soluciones factibles, eficientes y rápidas, dichos procesos son manejados mediante la programación lineal, que planea actividades para lograr mejores resultados entre las alternativas de solución. Sin dar espacio para la existencia de dudas en ninguna de las relaciones, el problema de optimizar la función objetivo sujeta a diferentes restricciones (Marín y Maya, 2016).

La programación lineal es una técnica de optimización matemática.Por técnica de optimización, se concibe la idea de un método que intenta maximizar o minimizar un objetivo establecido, como por ejemplo la maximización de utilidades o la reducción de los costos. La programación lineal constituye un subconjunto de un área mayor denominada programación matemática (Budnick. 2007)

A la programación lineal, se la considera como una herramienta de fundamental importancia, pues, mediante su aplicación, se obtienen soluciones cuantitativas a problemas de todo tipo, buscando mejorar el resultado y una óptima toma de decisiones.

En cualquier problema de programación lineal es puntual tomar ciertas decisiones, las cuales se representan mediante variables de decisión xj utilizadas en el modelo de programación lineal. La función objetivo es el objetivo que en varios casos puede ser considerado el rendimiento total, el nivel de utilidades, los costos generados, niveles de contaminación, participación en el mercado, la rentabilidad sobre una inversión. Al conjunto de restricciones, se les considera como las condiciones que debe cumplir o satisfacer los diferentes niveles de las variables de decisión. La resolución de problemas de programación lineal se lleva a cabo mediante el desarrollo de tres fases:

- Planteamiento del modelo
- Resolución del problema
- Análisis económico de los resultados

1.2. Concepto de programación lineal

La programación lineal hace referencia a varias técnicas matemáticas usadas para la asignación óptima de recursos limitados a distintas demandas que compiten por ellas (Chase, Jacobs y Aquilano, 2009).

Para otros autores, la programación lineal es una técnica de optimización que busca maximizar o minimizar una función lineal, llamada función objetivo, sujeta a restricciones también lineales (Álvarez. 2005).

En conclusión, se define como programación lineal el enfoque para la solución de problemas con miras a tomar decisiones acertadas, cuyo modelo matemático es la función lineal, sujeta a restricciones lineales no negativas.

Se le considera también como una herramienta aplicable a diferentes campos como, empresarial, textil, transporte, producción, telecomunicaciones, entre otros.

De las áreas que soporta a otras ciencias, como la medicina y la nutrición, que han encontrado en la informática un soporte adecuado para crecer como ciencias.

1.3. Características de la programación lineal

La programación lineal tiene un alto impacto a escala general, es aplicable a una gran variedad de problemas organizacionales, se fundamenta en las siguientes características (Rodríguez y Aldana, 2012)

- Se debe establecer algún criterio de decisión.
- Las relaciones de las variables deben ser de tipo lineal.

1.4. Objetivos de la programación lineal

- Encontrar soluciones a través de métodos matemáticos con el uso de sistemas lineales a problemas de carácter económico- técnico representados por la limitación de recursos.
- Resolver casos de combinación óptima de mezclas de producción, disposición interna de procesos, maximización de beneficios, localización, asignación de recursos, minimización de costos, transporte, entre otros

1.5. Aplicaciones de la programación lineal

La programación lineal es la más popular de las orientaciones que se engloban dentro de las técnicas matemáticas para la optimización y ha sido aplicada a diversos problemas de la administración de operaciones. Entre las principales aplicaciones se enuncian las siguientes.

- Planeación de operaciones y ventas agregadas: busca encontrar el programa de producción que tenga el costo mínimo. El problema radica en construir un plan para un período determinado (entre tres y seis meses) que, al enfrentar las limitaciones de la capacidad de producción deseable y el tamaño de la fuerza de trabajo, satisfagan la demanda esperada. Dentro de los costos notables estimados en el problema, se consideran salarios (trabajo regular como horas extras), nuevas contrataciones, posibles despidos, costo del manejo de inventarios.

- Análisis de la productividad: tomando en cuenta el bien o servicio que se va a producir, se considera el grado de eficiencia que la manufactura o el establecimiento del servicio utilizan en comparación con las unidades que posean un mejor desempeño. Para lo cual se sugiere la aplicación de un enfoque denominado análisis envolvente de datos.

- Planeación de productos: hallar la composición recomendable de productos, considerando los recursos y costos que requieren cada uno de ellos. Por mencionar algunos ejemplos: la mezcla óptima de elementos químicos para pinturas, alimentos, entre otros.

- Rutas de los productos: definir el camino óptimo para fabricar un producto procesado en secuencia que pasa por distintos procesos, en los cuales se dispone de maquinaria con costos propios y características de producción.

- Programación de cuadrillas: encontrar una ruta óptima para utilizar recursos como, por ejemplo: aviones, buses camiones, cuadrillas que los conducen para ofertar servicios de transporte.

- Control de procesos: tiene el objetivo de minimizar los desperdicios generados en el proceso productivo.

- Control de inventarios: determinar la combinación óptima de productos que se deberá tener en almacenamiento.

- Programación de la distribución: encontrar la combinación óptima de embarques para distribuir la producción a los diferentes destinos.

- Estudios para ubicar la planta: definir la ubicación acertada para una nueva planta evaluando los costos de embarque, las fuentes de suministros y de demanda.

- Manejo de materiales: definir rutas con el propósito de minimizar los costos para el manejo de materias y maquinarias.

En los últimos años, la programación lineal ha tenido una creciente aceptación en la industria por la disponibilidad de información detallada de las operaciones y el interés fundamental de optimizar tanto costos como ingresos, por lo cual a la programación lineal se le ha denominado opción de planeación avanzada, planeación sincronizada u optimización de procesos.

1.6. Condiciones básicas de la programación lineal

Para el planteamiento de un problema de programación lineal, se deben cumplir y cinco condiciones básicas:

- Recursos limitados.
- Objetivo explícito.
- Linealidad.
- Homogeneidad.
- Divisibilidad.

Al hacer referencia a los recursos limitados, se considera la cantidad limitada sea de horas de trabajo, equipos, dinero, materiales, suministros. El objetivo explícito hace referencia a la maximización de utilidades o minimización de costos. La existencia de linealidad hace referencia a todo proceso, actividad o relación lineal utilizada, se identifica con la cantidad de cada uno de los factores con respecto a los demás y a las cantidades de cada uno de los productos, por ejemplo: dos es el doble de uno, es decir; que si fueran necesarios 30 minutos para fabricar una pieza, entonces dos pieza de la misma clase tomaría 60 minutos. Homogeneidad quiere decir que los productos elaborados en una maquinaria son idénticos o todas las horas de trabajo de un obrero son igual de productivas y la divisibilidad en la programación lineal presupone que tanto productos como recursos se pueden subdividir en fracciones.

Cabe mencionar que cuando el único objetivo es maximización o minimización, se utilizará la programación lineal; en el caso de existir varios objetivos, se aplicará la programación por metas.

1.7. Preguntas para resolver

1.¿Cuándo surge la programación lineal (PL)?
2. ¿Qué es programación lineal?
3. ¿Cuáles son las fases de PL en la resolución de problemas?
4. Enuncie las características de la programación lineal.
5. ¿Cuáles son los objetivos de la programación lineal?
6. Enumere las aplicaciones de la programación lineal.
7. ¿Cuáles son las condiciones básicas de la programación lineal?
8. ¿A qué se hace referencia al decir recursos limitados?
9. ¿En qué consiste la homogeneidad?

2. MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Objetivo del capítulo

Determinar la estructura del planteamiento de problemas de programación lineal.

2.1. Problema general de programación lineal

Todo modelo de investigación operativa, incluida la programación lineal, posee tres componentes básicos que son:

- Variables
- Objetivos
- Restricciones

La definición correcta de variables de decisión es el primer paso en el desarrollo del modelo. Una vez concluido dicho proceso, la tarea de construir la función objetivo (Z) y las restricciones es más directa (Taha, 2004).

Los problemas de la programación lineal se generan por los recursos limitados, que buscan distribuirse de la mejor manera. Los recursos, al ser limitados, pueden ser distribuidos de diversas maneras como tantas combinaciones matemáticas sean posibles vinculadas a un mismo objetivo. Por lo antes expuesto, se crea la necesidad de distribuirlos en forma equilibrada y armónica entre los factores que intervienen en el problema, con el propósito de hallar las mejores alternativas de uso, cumpliendo el objetivo establecido. Un problema de programación lineal implica el sentido de la función, propósito o meta, recursos disponibles y habilidad o forma para comparar y seleccionar la alternativa óptima. En términos formales, el problema de programación lineal crea un proceso de optimización en el cual se eligen valores no negativos de una serie de variables de decisión de modo que maximicen o minimicen una función objetivo, cuya fórmula es la siguiente:

$$\text{Max o min } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \tag{2.1}$$

Sujeto a las restricciones:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \leq B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \leq B_2 \qquad (2.2)$$

$$A_{m1}X_1 + A_{m1}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n \leq B_m$$

Dónde:

C_n, A_{mn} y B_m son constantes dadas. Dependiendo del problema, las restricciones se pueden expresar con signo de igualdad o con signos de mayor o igual que y menor o igual que.

2.2. Términos claves en programación lineal

Para la mejor comprensión en el planteamiento de problemas de programación lineal, se definen los siguientes términos:

- Función objetivo: es la variable (Z), la cual representa lo que se busca optimizar. La función objetivo tiene un estrecho vínculo con la pregunta general que se desea responder. Si en un modelo resultan distintas preguntas, la función objetivo se relacionaría con la pregunta de nivel superior, es decir; la pregunta fundamental.

- Variables del problema: aquellas variables desconocidas y que, al resolver el problema, deben quedar definidas con el propósito de alcanzar la optimización de la función objetivo. Se les denomina también variables de decisión, las cuales, en teoría, representan factores controlables del modelo y que contribuyen a la consecución de la función objetivo.

- Coeficientes de la función objetivo: representan las cantidades constantes que aparecen en la ecuación de la función objetivo.

• Restricciones: constituyen las limitaciones físicas o las condiciones que debe cumplir el problema que va a ser resuelto mediante programación lineal. Por ejemplo: la cantidad de materiales, el tiempo, el recurso humano, entre otros. Suelen definirse como restricciones funcionales.

• Restricciones no explícitas: condiciones ocultas; es decir, es una información no disponible, pero que debe ser tomada en cuenta tanto para el planteamiento del problema como para su resolución. Son denominadas variables de no negatividad (Izar, 2012).

2.3.Planteamiento de problemas con programación lineal

La programación lineal es la base fundamental de la investigación operativa, la metodología para plantear un problema como se muestra en la figura 2.1 inicia con la definición de variables, definición de la función objetivo, el establecimiento de las restricciones.

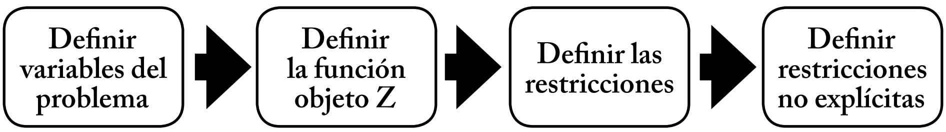


Figura 2.1. Metodología de planeamiento de un problema con programación lineal
Fuente: Izar, (2012).

• Definir variables del problema: reside en determinar las variables, representarlas con letras y definir sus unidades.

• Definir la función objetivo: identificar las variables que deben ser optimizadas (maximización o minimización según el caso). Se representa con la letra Z y se expresa mediante una ecuación matemática en función de las variables del problema y sus coeficientes.

• Definir restricciones: establecer por cada restricción una ecuación en relación a con las variables del problema. Generalmente dichas ecuaciones están representadas por desigualdades, sean de tipo mayor que o menor que.

• Definir restricciones no explícitas: identificar y expresar estas restricciones en el planteamiento del problema.

En la metodología antes expuesta, se debe tomar atención a las unidades de cada ecuación planteada; es decir, si en el lado izquierdo de las restricciones las unidades son kilogramos, en el lado derecho también serán kilogramos.

2.4. Maximización

En el caso de problemas de maximización, la solución se determina en la parte interior formada por el polígono convexo. En este caso las restricciones serán representadas por la expresión ≤ (menor o igual); lo cual indica que, en el caso de estudio no podrán utilizarse más recursos que aquellos de los que se dispone (finitud) y los coeficientes de las variables del problema de acuerdo a las necesidades técnicas.

- Finitud: el número de los procesos implícitos y los recursos disponibles corresponden a cantidades finitas, conocidas y cuantificables.

$$Max_Z = X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \qquad (2.3)$$

Para el caso de maximización, las limitaciones se representarán de la siguiente manera:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \leq B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \leq B_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

La función objetivo puede representarse mediante un conjunto de rectas paralelas con pendiente.

$$M = -\frac{C_1}{C_2}$$

Dónde C_1 es el coeficiente de X_1, y C_2 el coeficiente de X_2. Cada recta representa un conjunto de puntos que proporcionan un beneficio idéntico

Ejercicio 2.1.

La compañía ODGA S.A., fabrica dos tipos de productos; producto A y producto B; cada producto A genera una utilidad de 3 USD, y cada producto B una utilidad de 5 USD. La disponibilidad de los centros de maquinados se presenta en la tabla 2.1. La producción del producto A requiere de 4 horas de trabajo en el centro de maquinado 1 y 2 horas en el centro de maquinado 2. La fabricación del producto B requiere 6 horas en el centro de maquinado 1, 6 horas en el centro de maquinado 2 y 1 hora en el centro de maquinado 3.

Centro de maquilado	Disponibilidad (horas máximas)
1	120
2	72
3	10

Tabla 2.1. Disponibilidad en centros de maquinado

Si la empresa busca maximizar la utilidad, ¿cuántos productos de cada tipo debe producir por día?

Solución:

Según la metodología descrita, el primer paso es la definición de variables:

X_1 = número de productos tipo A a producir.

X_2 = número de productos tipo B que se va a producir.

El siguiente paso es la definición de la función objetivo que, para el presente caso, es la maximización de utilidad.

Utilidad del producto A = 3 USD

Utilidad del producto B = 5 USD

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2$$

El siguiente paso es definir las restricciones a las cuales está sujeto el problema en estudio. Se toma en consideración la disponibilidad de horas de cada uno de los centros de maquinado, así como el requerimiento de horas para cada uno de los productos. Por lo que las restricciones serán las siguientes:

$$4X_1 + 6X_2 \leq 120 \text{ horas}$$
$$2X_1 + 6X_2 \leq 72 \text{ horas}$$
$$1X_2 \leq 10 \text{ horas}$$

Finalmente se establecen las restricciones no explícitas que, para el ejemplo, son la de no negatividad y que las variables son enteras.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

El planteamiento de este problema cumple con los requisitos estándar, es decir; los recursos son limitados (un número definido de horas para cada centro de maquinado). Hay una función objetivo, se conoce el valor de cada variable y la meta para resolver el problema, en el presente caso, es la maximización de la utilidad obtenida por cada uno de los productos. Las ecuaciones son lineales (No hay componentes, ni productos cruzados). Los recursos son homogéneos (todo se ajusta a la unidad de medida; en este caso, las horas / máquina). Las variables de decisión son no negativas.

2.5. Minimización

En el caso de problemas de minimización, se utilizará en las restricciones la expresión ≥ (mayor o igual). La zona de solución se ajusta al conjunto convexo hacia afuera e identifica un punto extremo (vértice) que minimice la función objetivo.

Ejercicio 2.2

La empresa XYZ S.A. produce dos tipos de bienes R y S. La planta puede producir al menos 90 unidades de R y 180 de S diariamente. El costo por unidad del producto R representa 45 USD, mientras que el costo del producto S es de 80 USD, y una producción combinada de ambos productos de al menos 100 unidades.

Según la metodología descrita, el primer paso es la definición de variables

X_1 = número de bienes tipo R que se va a producir.

X_2 = número de bienes tipo S que se va a producir.

El siguiente paso es la definición de la función objetivo, que, para el presente caso, es la minimización de costos.

Costo de producción de bienes tipo R= 45 USD

Costo de producción de bienes tipo S= 80 USD.

Función objetivo

$$Min\ Z = 45\ X_1 + 80\ X_2$$

El siguiente paso es definir las restricciones a las cuales está sujeto el problema en estudio. Se toma en consideración la disponibilidad para la producción de los bienes R y S

$$X_1 \geq 90$$
$$X_2 \geq 180$$
$$X_1 + X_2 \geq 100$$

Finalmente se establecen las restricciones no explícitas que, para el ejemplo, son la de no negatividad y que las variables son enteras.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

2.6. Métodos de programación lineal

Luego de diseñar el modelo de optimización lineal es necesario solucionar el mismo. Para llegar a resolver un problema de programación lineal, se utilizan diferentes métodos de solución. En la tabla 2.2 se desarrollan los más difundidos el método gráfico y el método simplex.

Método gráficos	Método simplex
Soluciona un problema de programación lineal con no más de dos variables.	**Primer método para solución de problemas de programación lineal, considerado método clásico. Puede considerar dos o más variables para la resolución de problemas.**

Tabla 2.2. Métodos de programación lineal
Fuente: Taha, (2004).

2.7. Ejercicios propuestos

1. ¿Cuáles son los componentes básicos de un problema de programación lineal?

2. ¿Qué es la función objetivo?

3. ¿Cuáles son los pasos para el planteamiento de un problema de programación lineal?

4. ¿Cuáles son los métodos de programación lineal más conocidos? Defina cada uno de ellos.

5. La fábrica El Cuero actualmente produce dos tipos de correas de cuero.

En cada correa tipo 1, de alta calidad, obtiene una ganancia de 4,5 USD por unidad vendida, mientras que, por cada correa tipo 2, de calidad media, gana 2,80 USD. El área de producción determinó que diariamente puede producir hasta 500 correas de calidad media o 250 de alta calidad. Solo dispone de cuero para 400 correas de ambos tipos diariamente, 200 hebillas elegantes para las correas tipo 1 y 350 para correas tipo 2. Plantee el problema de programación lineal de tal manera que la empresa maximice sus utilidades.

6. La compañía Los Nevados S.A. produce dos tipos de refrigeradoras (línea

económica y línea de lujo). De los estudios realizados sobre las necesidades en el mercado se estima que, para el próximo año, los requerimientos máximos de estos productos serán de 80 000 unidades de la línea de lujo y 120 000 unidades de refrigeradoras económicas. La utilidad que deja la venta de las refrigeradoras económicas es de 150 USD por unidad y de 300 USD por unidad de lujo. ¿Cuántas unidades de cada línea puede producir para que la empresa alcance el máximo de utilidad anual, si dispone de 10 000 unidades de hierro,

16 000 unidades de fibra de vidrio, 14 000 unidades de aluminio? Además, la composición de dichos elementos para cada refrigeradora se muestra a continuación:

Línea Económica	10 % hierro
	12 % fibra de vidrio
	7 % de aluminio
Línea de Lujo	5 % hierro
	12 % fibra de vidrio
	10 % de aluminio

7. Un fabricante de gasolina para aviones vende dos clases de combustibles, A y B. El combustible A tiene 12,5 % de gasolina grado 1 y 12,5 % de gasolina grado 2, además del 25 % de gasolina grado 3; el combustible B tiene gasolina grado 2 25 %, y grado 3 el 35 %. Disponible para la producción hay 25 galones grado 1; 100 galones grado 2 y 95 galones grado 3. El combustible A puede venderse el galón a 1,71 USD, y obtener una utilidad del 35 %, mientras que el combustible B puede venderse a 1,15 USD cada galón, obteniendo una utilidad del 37 %. Plantee el problema de tal manera que se pueda definir cuál será el mayor beneficio que se pueda obtenerse.

8. Considere que usted gerencia una pyme productora de calzado, que se distribuye zapatos, tanto para damas, como para caballeros. El producir un par de zapatos de hombre requiere 1 hora 35 minutos; para un par de zapatos de dama se necesita 1 hora. El taller dispone no más de 850 horas mensuales.Suponga que cada par de zapatos, tanto de damas como caballeros, requiere una unidad de materia prima. En el mercado, se puede conseguir materia prima para no más de 800 pares de calzados.

Para la confección de zapatos de hombres, el taller dispone de 400 pares de tacos especiales. Los zapatos de mujer utilizan una fibra cuya disponibilidad es de al menos 500 pares. La utilidad generada es de 4,25 USD, por par de zapatos de caballeros y 4,15 USD, por par de zapatos de damas. Determine la función objetivo correspondiente.

9. Una empresa especializada en mobiliario produce sillas y mesas que se venden a 200 USD y 300 USD, respectivamente. Se desea conocer cuántas unidades de cada producto puede producir cada operario para maximizar los ingresos tomando en consideración las siguientes premisas:

El número total entre sillas y mesas no excede de 4 por operario diariamente. El material utilizado para las mesas cuesta 40 USD, el utilizado para las sillas cuesta 20 USD. Cada operario dispone de 1200 USD en materiales. Se solicita plantear el problema con un modelo de programación lineal.

10. MKT busca promocionar un nuevo producto y pretende llegar a dos tipos de clientes: a mujeres cuyos ingresos anuales no superen los 4000 USD, y mujeres que superen dicho valor. Considerar que las personas del primer grupo compran dos veces más el producto que las personas del segundo grupo. El objetivo de la empresa es maximizar las compras, para lo cual se anuncia el producto en prensa escrita y en televisión. Una unidad de publicidad en televisión cuesta 4800 USD, y llega aproximadamente a 1000 personas del primer grupo y 2 000 del segundo grupo. Una publicidad en la prensa escrita cuesta 5000 USD, y llega aproximadamente a 3000 personas del primer grupo y a 1500 personas del segundo grupo. Por política empresarial, se decide usar al menos tres unidades de publicidad en televisión y seis unidades de publicidad en prensa escrita. El presupuesto para publicidad es de 45000 USD; se pide plantear el problema con un modelo de programación lineal.

11. Una empresa textil funciona 10 horas al día para fabricar dos tipos de tela en tres procesos secuenciales. A continuación, se muestra el requerimiento en minutos para cada proceso.

Producto	Minuto por metro de tela			Utilidad por metro
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	5	6	8	0,9
2	3	12	10	0,75

Realice el planteamiento del problema.

3. PROGRAMACIÓN LINEAL GRÁFICA

Objetivo:

Facilitar la comprensión de los procedimientos de solución gráfica para los problemas de programación lineal.

3.1. Introducción

El método gráfico representa la forma más sencilla para la resolución de problemas de programación lineal, consiste en graficar las ecuaciones correspondientes a las restricciones en el plano cartesiano, siendo cada variable representada en uno de los ejes, de tal manera que quede definida la zona o región factible de solución, procediéndose a encontrar en ella el punto que optimice la función objetivo.

La aplicación de la programación lineal gráfica se limita a problemas que incluyen dos variables de decisión (o tres en el caso de gráficas tridimensionales), a través de este método, se proporciona una visión inmediata de la posible solución.

El método gráfico consiste en obtener geométricamente la solución del problema de programación lineal. Se precisa conocer:

- La representación del conjunto de oportunidades que viene dada por la intersección de los semi-espacios definidos por las restricciones.
- La gráfica de las restricciones definidas por la función objetivo y el conjunto de oportunidades

3.2.Metodología de resolución programación lineal gráfica

En la figura 3.1, se evidencia la metodología determinada por Thierauf y Grosse, (1979) con el siguiente procedimiento para la resolución de problemas de programación lineal mediante el método gráfico.

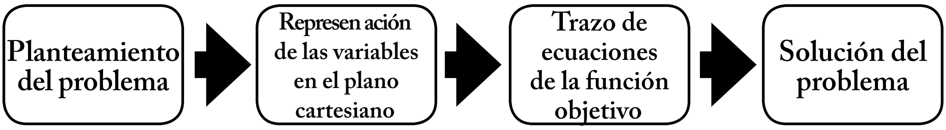


Figura 3.1. Metodología resolución método gráfico. Fuente: Thierauf, R. J.Y, Grosse, R. A. (1979).

- Planteamiento del problema: transformar la información dada en el problema en un sistema de ecuaciones, basadas en programación lineal.

- Representación de las variables en el plano cartesiano: trazar las ecuaciones de las restricciones en el plano cartesiano; cada intersección de las restricciones formará un vértice para la zona factible de solución, siendo el primero de estos el origen, debido a que es la intersección de las restricciones de no negatividad. Cabe mencionar que, si las restricciones son de tipo mayor o igual que, la zona factible de solución se ubicará hacia la parte, superior del primer cuadrante de la gráfica, si las restricciones son de tipo menor o igual que la zona factible será la que quede por debajo de la línea correspondiente a la restricción, y si la restricción fuera una igualdad la zona factible deberá quedar sobre la línea correspondiente a dicha restricción.

- Trazo de las ecuaciones de la función objetivo: dándole diferentes valores a Z. Este paso puede omitirse, pues el objetivo es encontrar el punto que corresponde a la solución del problema, el cual será aquel que optimice la función objetivo.

- Hallar la solución del problema: es aquella recta de las trazadas que opimice la función objetivo. Pueden existir varias soluciones óptimas en un problema, pero es importante determinar cuál de todas esas soluciones es la factible. Recordando que la solución factible óptima es aquella admisible para que la función objetivo alcance el óptimo propuesto.

3.3. PHP Simplex

PHP Simplex es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal. Su uso es libre y gratuito, es capaz de resolver problemas mediante el método gráfico y el método Simplex, además, no tienen limitaciones con el número de variables de decisión ni restricciones de los problemas. Esta herramienta se desarrolló para ayudar al proceso de aprendizaje, ya que no solo muestra resultados finales, sino también las operaciones intermedias, posee un interfaz amigable de manejo fácil e intuitivo, no necesita ser instalado para poder usarlo.

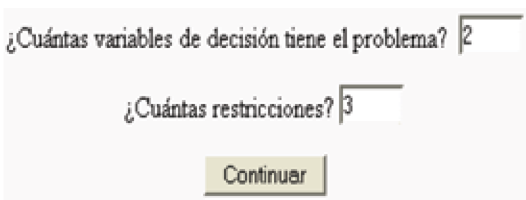
3.3.1 Cómo usar PHP Simplex

Se debe ingresar al siguiente link para utilizar este software libre: http://www.phpsimplex.com. Una vez ingresado, seguir los siguientes pasos:

a. Se debe seleccionar el método de resolución como se muestra en la figura 3.2; para el presente caso, se usará método gráfico.

Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.2 PHP Simplex

b. Una vez seleccionado el método de resolución de programación lineal, se introducirán cuántas variables de decisión y restricciones tiene el problema como se muestra en la figura 3.3, al dar un clic en continuar. En el caso del método gráfico generalmente se utilizan dos variables para realizar el gráfico en el plano cartesiano.

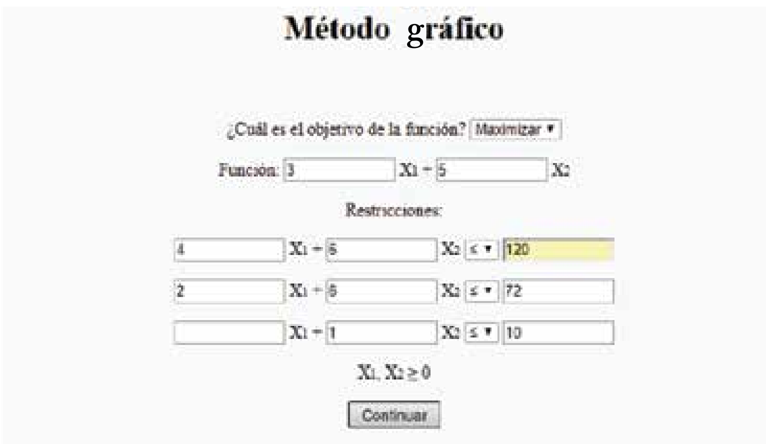


Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.3 PHP Simplex (variables y restricciones)

c. Luego de pulsar en continuar, es necesario introducir los datos solicitados en la figura 3.4.

Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.4. PHP Simplex (planteamiento del problema)

Ante la pregunta, "¿Cuál es el objetivo de la función?" deberá seleccionar del desplegable si desea maximizar o minimizar, luego rellenar adecuadamente las casillas de "función" con los coeficientes adecuados para cada variable de decisión. Operar de la misma forma para completar las casillas de las restricciones, teniendo especial cuidado con el tipo de inecuación ya que puede seleccionar del menú desplegable "≥", "≤" ó "=", como se muestra en la figura 3.5, en el caso de que alguna de las restricciones tenga una sola variable, en la variable sobrante el coeficiente será cero o en su defecto como se muestra en la figura no se incluye ningún coeficiente.



Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.5 PHP Simplex (planteamiento del problema)

d. Luego de ingresar los datos solicitados se procede a continuar. Como se muestra en la figura 3.6, el ejercicio ha sido planteado.

MAXIMIZAR: $3X_1 + 5X_2$

$4X_1 + 6X_2 \leq 120$

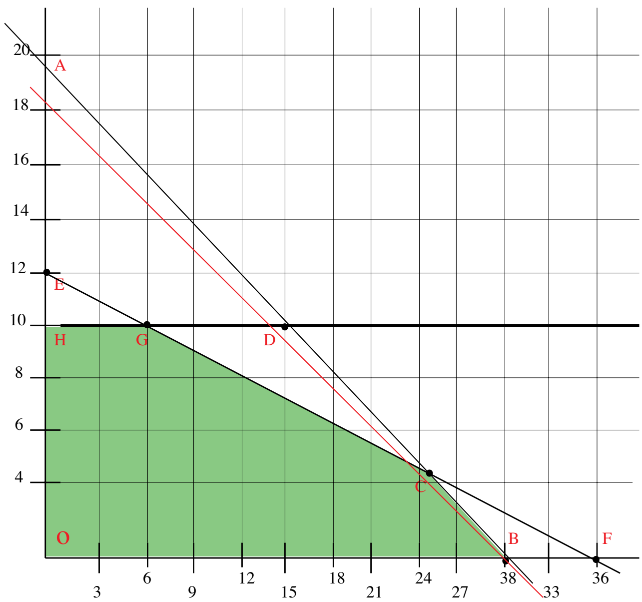
$2X_1 + 6X_2 \leq 72$

$0X_1 + 1X_2 \leq 10$

$X_1, X_2 \geq 0$

Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.6, PHP Simplex (planteamiento del problema)

Una vez planteado el problema como se muestra en la figura 3.6, la herramienta informática, pulsar en continuar.Dicho software procede a graficar el problema de programación lineal, hallando la zona factible de solución como se evidencia en la figura 3.7 y además muestra las posibles soluciones como se evidencia en la figura 3.8



Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.7. Gráfico problema de programación lineal

El PHP Simplex permite determinar la respuesta de optimización de la función objetivo (Figura 3.8); además ofrece la posibilidad de resolver el mismo ejercicio a través del método Simplex.Dicha tabla surge en el momento de graficar el planteamiento del problema

Punto	Coordenada X (X1)	Coordenada Y (X:)	Valor de la función objetivo (Z)
0	0	0	0
A	0	20	100
B	30	0	90
C	24	4	92
D	15	10	95
E	0	12	60
F	36	0	108
G	0	10	68
H	0	10	50

☐ Mostrar resultados como fracciones

NOTA:
En color verde los puntos en los que se encuentra la solución
En color rojo los puntos que no pertenecen a la región factible

Resolver mediante el método Simplex

Fuente: http://www.phpsimplex.com Figura 3.8. Solución problema de programación lineal

Con lo antes expuesto, el ejercicio propuesto con el uso de PHP Simplex ha quedo resulto, encontrando la solución factible correspondiente, acorde a la función objetiva planteada en el inicio.

3.4. Ejercicios resueltos de maximización y minimización, método gráfico

Ejercicio 3.1

La compañía ODGA S.A. fabrica dos tipos de productos; producto A y producto B; cada producto A genera una utilidad de 3 USD, y cada producto B, una utilidad de 5 USD. La producción del producto A requiere de cuatro horas de trabajo en el centro de maquinado 1 y dos horas en el centro de maquinado 2. La fabricación del producto B requiere seis horas en el centro de maquinado 1, seis horas en el centro de maquinado 2 y una hora en el centro de maquinado 3. La disponibilidad de los centros de maquinado se presenta a continuación: 120 h centro 1; 72 h centro 2 y 10 h centro 3.

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 6X_2 \leq 120 \text{ horas centro maquinado 1}$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 72 \text{ horas centro maquinado 2}$$

$$1X_2 \leq 10 \text{ horas centro maquinado 3}$$

$$X1, X2 \geq 0$$

Las desigualdades se transforman en igualdades para graficarlas en el plano cartesiano.

$$4X_1 + 6X_2 = 120$$

$$2X_1 + 6X_2 = 72$$

$$1X_2 = 10$$

Para trazar las líneas en el plano cartesiano, cada variable toma el valor de cero y se determina el valor de la otra variable.

$$4X_1+6X_2=120$$
$$\text{Si } X_1 = 0, X_2 = 20$$
$$\text{Si } X_2 = 0, X_v = 30$$

Entonces los puntos para graficar serán P1 (0; 20) y P2 (30; 0)

El mismo procedimiento se realiza para el resto de igualdades:

$$2X_1+6\mathrm{X}_2= 72$$
$$\text{Si } X_1 = 0, X_2 = 12$$
$$\text{Si } X_2 = 0, X_1 = 36$$

Los puntos para graficar son: P1 (0; 12) P2 (36;0)

$$1X_2=10$$
$$P_1\ (0;\ 10)$$

Al tener esta restricción , una sola variable se graficará una línea paralela al eje de las X. Al ser las variables no negativas, en el gráfico se delimita la región o zona factible de solución en el primer cuadrante como se muestra en la figura. 3.9

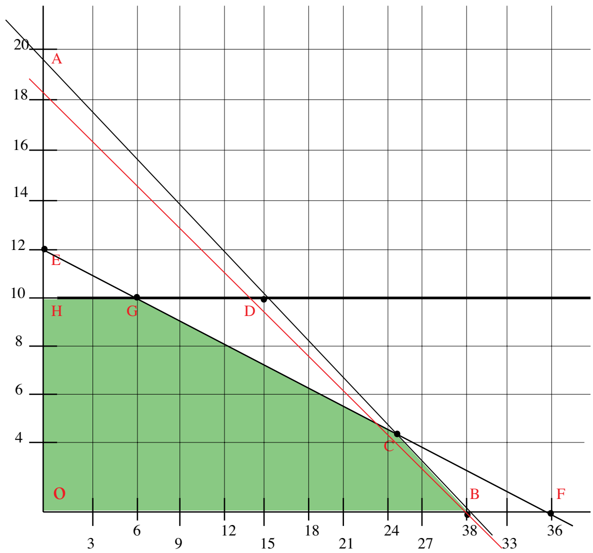


Figura 3.9 Zona Factible de solución Fuente: http://www.phpsimplex.com

En el eje de las X, está representado el producto A y, en el eje de las Y, el producto B; la zona sombreada en color verde es la zona factible de solución, se considerará la solución óptima el cruce de las regiones factibles de todas las restricciones siendo el punto óptimo el C, que corresponde al cruce de la primera con la segunda restricción.

La función objetivo se puede trazar suponiendo cifras arbitrarias para la utilidad total, y a continuación se resuelve la ecuación con el fin de conocer las coordenadas del eje tal como se concibió con las restricciones, según se aprecia en la gráfica mediante la línea decolor rojo.

En términos matemáticos, podemos reemplazar en la función objetivo los puntos hallados dentro de la región factible para definir la óptima solución.

En la figura 3.9, existen tres puntos a ser considerados parte de la solución, punto G (cruce restricción 2 y 3) punto C (cruce ecuación 1 y 2) y punto B (30; 0)

Para hallar las coordenadas del punto G; realizamos un sistema de ecuaciones

$$2X_1+6X_2= 72$$

$$1X_2=10$$

Donde:

$X_1 = 6$

$X_2 = 10$

Para hallar las coordenadas del punto C; realizamos un sistema de ecuaciones

$$4X_1+6X_2=120$$

Donde:

$X_1 = 24$

$X_2 = 4$

Puntos	X_1	X_2	Max $z= 3X_1+ 5X_2$	Solución
G	6	10	3(6) + 5 (10)	68
C	24	4	3(24)+5 (4)	92
B	30	0	3(30)+5(0)	90

Figura 3.9 Zona Factible de solución Fuente: http://www.phpsimplex.com

Luego de determinar las posibles soluciones como se muestra en la tabla 3.1, reemplazando los puntos antes mencionados, se determina que la óptima solución es 92 USD de utilidad diaria, produciendo 24 productos tipo A y cuatro productos tipo B ninguna otra combinación de productos genera una mayor utilidad.

Ejercicio 3.2

Considerando que una empresa fabrica dos tipos de bienes[1] X_1 y X_2, y busca minimizar los costos. Determine cuál debe ser la producción para lograr el objetivo deseado. A continuación, se presenta la función objetivo.

[1] Los bienes no consideran la restricción no explícita de ser de tipo enteros.Se repite le mismo procediendo para las otras restricciones

$$Max\ Z=50X_1+100X_2$$

Sujeto a:

$$7X_1+2X_2\geq 28$$
$$2X_1+12X_2\geq 24$$
$$X_1,X_2\geq 0$$

Las desigualdades se transforman en igualdades para graficarlas en el plano cartesiano

$$7X_1+2X_2=28$$
$$2X_1+12X_2=24$$

Para trazar las líneas en el plano cartesiano, cada variable toma el valor de cero y se determina el valor de la otra variable.

$$7X_1+2X_2=28$$
$$\text{Si } X_1 = 0, X_2 = 14$$
$$\text{Si } X_2 = 0, X_1 = 4$$

Entonces los puntos para graficar la primera restricción serán: P1 (0; 14) y P2 (4; 0).

Se repite le mismo procediendo para las otras restricciones

$$2X_1+12X_2=24$$
$$\text{Si } X_1 = 0, X_2 = 2$$
$$\text{Si } X_2 = 0, X_1 = 12$$

Entonces los puntos para graficar la segunda restricción serán: P1 (0; 2) y P2 (12; 0). Al ser las variables no negativas, en el gráfico, se delimita la región o zona factible de solución en el primer cuadrante.

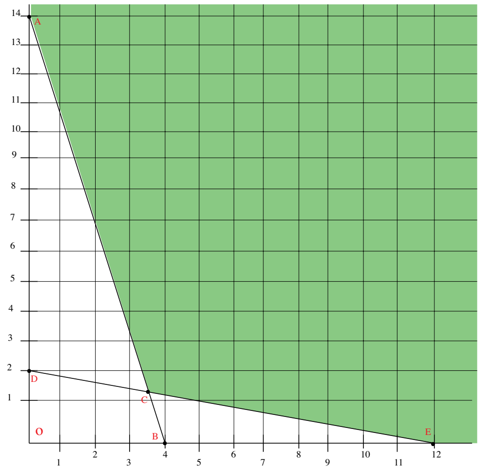


Figura 3.10 Zona factible de solución caso minimización
Fuente: http://www.phpsimplex.com

Al ser un caso de minimización, la zona de solución se ajusta al conjunto convexo hacia afuera e identifica un punto extremo (vértice) que minimice la función objetivo.

En el eje de las X, se representa la variable X_1, mientras que en el eje de las Y la variable X_2. En términos matemáticos, se procede a reemplazar los valores correspondientes de los puntos obtenidos en el gráfico dentro de la región factible de solución para determinar cuál de ellos permitirá minimizar el costo las posibles aplicaciones de producción. Para el presente caso de estudio, como se observa en la figura 3.10 existen tres puntos posibles de solución. A, C y E- que se hallan dentro de la zona de solución.

Punto A (0; 14)

Punto C, cruce de las restricciones, y para determinar dicho punto se realiza un sistema de ecuaciones, dando como resultado (3,6; 1,4).

Punto E (12; 0)

Con los puntos obtenidos, reemplazamos las variables en la función objetivo para determinar cuál de estos permite obtener el mínimo costo.

Puntos	X_1	X_2	Min $z = 50X_1 + 100X_2$	Solución
A	0	14	50(0) + 100 (14)	1400
B	3.6	1.4	50(3.6)+100 (1.4)	320^{+}
C	12	0	50(12)+100(0)	600

Tabla 3.2. Soluciones factibles para Min Z

La fábrica debe producir 3,6 bienes tipo X1 y 1,4 bienes tipo X2 para obtener un costo mínimo de 320 unidades monetarias, ya que ninguna otra combinación produce un costo menor.

3.5. Ejercicios propuestos

1. La compañía Los Nevados S.A. produce dos tipos de refrigeradoras (línea económica, y línea de lujo). De los estudios realizados sobre las necesidades en el mercado se estima que para el próximo año, los requerimientos máximos de estos productos serán de 80 000 unidades de la línea de lujo y 120 000 unidades de refrigeradoras económicas. La utilidad que deja la venta de las refrigeradoras económicas es de 150 USD por unidad y de 300 USD por unidad de lujo. ¿Cuántas unidades de cada línea puede producir para que la empresa alcance el máximo de utilidad anual, si dispone de 10 000 unidades de hierro, 16 000 unidades de fibras de vidrio, 14 000 unidades de aluminio? Además, la composición de dichos elementos para cada refrigeradora se muestra a continuación:

Línea Económica
- 10 % hierro
- 12 % fibra de vidrio
- 7 % de aluminio

Línea de Lujo
- 5 % hierro
- 10 % fibra de vidrio
- 10 % de aluminio

Encuentre cuantas unidades debe producir para obtener la máxima ganancia.

2. Dados los siguientes datos resuelva por el método gráfico:

$$Max\ Z = 3{,}5\ X + 3Y$$

Sujeto a

$$2X + Y \leq 1000$$

$$X + Y \leq 800$$

$$X \leq 400$$

$$Y \leq 500$$

Siento X, Y ≥ 0; y enteras.

Determine cuántos pares de zapatos de cada clase debe producir para que el empresario pueda maximizar sus ganancias.

3. Dados los siguientes datos, resuelva por el método gráfico:

$$Max\ Z = 2\ X + Y$$

Sujeto a

$$12X + 14Y \leq 85$$

$$3X + 2Y \leq 18$$

$$Y \leq 4$$

Siento X, Y ≥ 0

4. Resolver por el método gráfico:

$$Min\ Z=10\ X+9Y$$

Sujeto a

$$X+Y \geq 12$$

5. Dados los siguientes datos, resuelva por el método gráfico:

$$Max\ Z= 40X+38Y$$

Sujeto a

$$X+Y \leq 30$$

$$X \leq 15$$

$$Y \leq 18$$

Siento X, Y ≥ 0; y enteras.

6. Grafique y encuentre la solución óptima

$$Min\ Z= 40\ X+40Y$$

Sujeto a

$$2X+Y \geq 220$$

$$X+2Y \geq 220$$

$$X+Y=140$$

Siento X, Y ≥ 0; y enteras.

7. Grafique y encuentre la solución óptima

$$Max\ Z = 20\ X + 35Y$$

Sujeto a

$$X + Y \leq 90$$

$$3X + Y \leq 180$$

Siento X, Y ≥ 0.

8. Grafique y encuentre la solución óptima

$$Min\ Z = 3X + 5Y$$

Sujeto a

$$0{,}1X + 0{,}40 \geq 600$$

$$0{,}16X \geq 400$$

$$0{,}12X + 0{,}10 \geq 450$$

Siento X, Y ≥ 0.

Determine cuál será el mínimo costo que se puede lograr en este tipo de producto.

9. Una compañía química está produciendo dos tipos de minerales, y busca minimizar los costos de producción. A continuación, se presenta la información requerida para encontrar el mínimo costo.

$$Min\ Z = 3\ X + 5\ Y$$

Sujeto a

$$10X + 4\ Y \geq 100$$

$$20X+30Y \geq 420$$

$$X \geq 4$$

$$Y \geq 4$$

Siento X, Y ≥ 0.

10. José es dueño de una granja de 45 ha. En ellas, siembra maíz y trigo. Cada hectárea sembrada con trigo rinde de utilidad 201 USD, mientras que una hectárea de maíz genera 300 USD de utilidad. En la granja, se cuenta con 100 trabajadores y 120 toneladas de fertilizante. Los requerimientos de mano de obra para cada hectárea de trigo corresponden a tres trabajadores y dos trabajadores para la siembra de maíz. En lo referente al fertilizante utilizado por cada hectárea, dos toneladas para trigo y cuatro toneladas para maíz. Utilizando el método gráfico de programación lineal, determine como debe combinar la siembra para que José maximice sus utilidades en la granja.

11. Una fábrica automotriz produce automóviles y camiones. Cada uno de los vehículos debe pasar tanto por el taller de pintura como por el taller de ensamblaje. Considere que, en el taller de pintura, únicamente se pueden pintar camiones en una cantidad de cuatro unidades por día, o seis unidades de automóviles. Si el taller ensamblara únicamente automóviles, procesaría cinco por día y si solo ensamblara camiones, procesaría cinco diariamente. El gerente de dicha compañía ha determinado que la utilidad por camión es de 800 USD, y que cada automóvil obtiene una ganancia de 500 USD. Determine el programa de producción diaria que maximice las utilidades de la fábrica.

12. Encuentre en forma gráfica la solución óptima del siguiente problema de programación lineal.

$$Max\ Z = X + Y$$

Sujeto a:

$$8X + 2Y \leq 16$$

$$5X + 2Y \leq 12$$

$$X, Y \geq 0$$

4. MÉTODO SIMPLEX

Objetivo

Facilitar la comprensión del uso del método Simplex en la resolución de problemas de programación lineal con tres o más variables.

4.1.Introducción

El procedimiento no gráfico de resolución de problemas de programación lineal más conocido y popular es el método Simplex, el cual constituye un procedimiento algebraico que resuelve cualquier problema de programación lineal, es un procedimiento matricial iterativo fundamentado en la metodología de Gauss Jordan en el manejo de variables no negativas. Fue elaborado por George Dantzing en 1947 (Izar, 2012). Su concepción ha facilitado la resolución de problemas de programación lineal con más de dos variables.

El método Simplex es un procedimiento iterativo que permite hallar la mejor solución a la función objetivo. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando dicho valor, es decir; se ha alcanzado la solución óptima (el mayor o menor valor posible, según el caso para que se satisfagan las restricciones). Partiendo del valor de la función objetivo en cualquier punto el procedimiento consiste en encontrar otro punto que mejore el anterior.

Al igual que el método algebraico, el método simplex llega a la solución óptima por medio de iteraciones o pasos sucesivos, utiliza conceptos de algebra matricial. Finalmente, este método proporciona un indicador que determine el punto en el cual se logra una solución óptima (Álvarez, 2005,p. 159).

4.2. Etapas del método Simplex

El método Simplex se divide en tres etapas como se muestra en la figura. 4.1

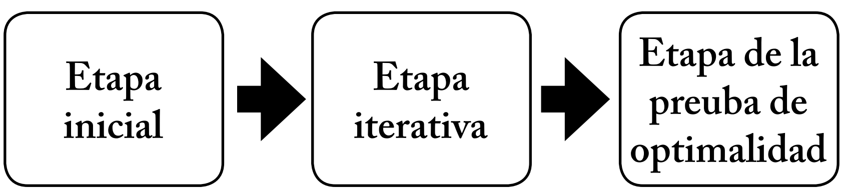


Figura 4.1. Etapas del método Simplex Fuente: Álvarez, (2005).

- Etapa inicial: consiste en dar la primera solución factible en el vértice correspondiente al origen.
- Etapa iterativa: el método busca una mejor solución que la anterior.
- Etapa prueba de optimalidad: se logra cuando la solución de un vértice es mejor que la de los vértices adyacentes.

4.3. Requerimientos del método Simplex

Existen tres requerimientos fundamentales para resolver un problema de programación lineal mediante el método simplex.

1. Se deben expresar como ecuaciones todas las restricciones.
2. El lado derecho de las restricciones no puede ser negativo.
3. Todas las variables se limitan a valores no negativos

4.4. Procedimiento de resolución método Simplex

Independientemente del número de restricciones (inecuaciones) y de incógnitas (variables) de un sistema, este método por sí mismo se adapta a un tratamiento de identificación que muestra una idea sujeta de solución.

1. Convertir las desigualdades en igualdades mediante la incorporación de variables de holgura o artificiales según el caso que corresponda, como se muestra en la tabla 4.1.

Tipo de restricción	Coeficiente de las variables de holgura	Coeficiente de las variables artificiales
Menor o igual que (≤)	+1	0
Mayor o igual que (≥)	-1	+1
Igualdad (=)	0	+1

Tabla 4.1 Coeficientes de las variables de holgura y artificiales
Fuente: Izar,(2012).

2. Incluir las variables de holgura y artificiales en las de la función objetivo, con un coeficiente cero (0) para el caso de las variables de holgura y con un coeficiente M para las variables artificiales.

3. Formar la tabla Simplex que contendrá la columna de constantes, el cuerpo y la parte identidad.

4. Encontrar una mejor solución que la anterior.

4.5. Maximización con método Simplex

En forma general, se presenta el método Simplex para el caso de maximización.

- Función objetivo

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \quad (4.1)$$

- Limitaciones o restricciones

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \leq B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \leq B_2 \quad (4.2)$$

.

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n \leq B_n$$

- Introducción variable de holgura

H1, H2, H3,..., Hn = variables de holgura

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + H_1 = B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n \quad + H_2 \quad = B_2 \tag{4.3}$$

.

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n \quad + H_n \quad = B_n$$

Al convertir el sistema de desigualdades en igualdades mediante la introducción de variables de holgura, se ha logrado el punto de partida para el método Simplex: Se agregan las variables de holgura a la función objetivo, antepuestas el coeficiente 0 (Mathur y Solow,1996)

$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0H_1 + 0H_2 + \ldots + 0H_n$$

4.6. Soluciones método Simplex

En el caso del método Simplex, existen tres tipos de soluciones:

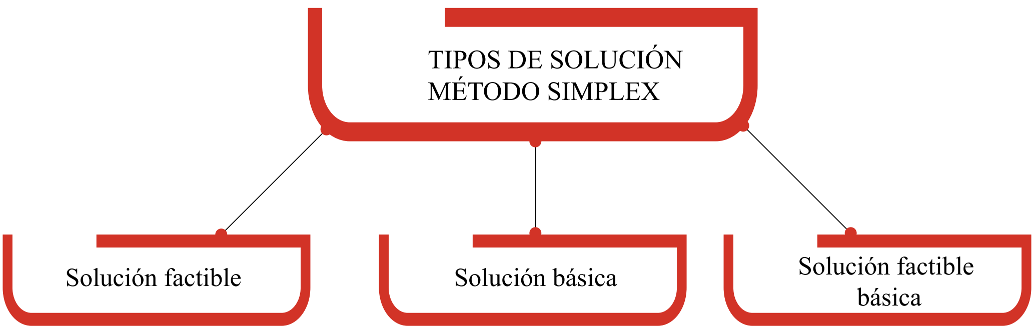


Figura 4.2. Tipos de solución método Simplex Fuente: Erazo, (2007).

Solución factible: una solución factible es cualquier conjunto de valores para n variables que satisfagan tanto las restricciones estructurales como las restricciones de no negatividad.

Solución básica: la solución básica se obtiene al despejar del sistema de ecuaciones lineales los valores de las variables.

Solución factible básica: es una solución básica que también satisface las restricciones de no negatividad.

Se puede manifestar que la óptima solución de un problema de programación lineal se encierra en el conjunto de soluciones factibles básicas. Por lo tanto, es posible encontrar la solución óptima al efectuar la búsqueda del conjunto de soluciones factibles básicas; este proceso es el que realiza el método Simplex. Comienza con una solución factible básica que consiste en el conjunto de dos variables, las m (variables básicas) y las n-m (variables no básicas). Mediante la aplicación del método Simplex se establece si existe la posibilidad de mejorar la función objetivo al intercambiar una variable básica y una no básica. Si en el intercambio da resultado una mejoría, se establece una variable básica existente igual a 0 (convirtiéndose en una variable no básica), se incluye una variable no básica existente en el conjunto de variables básicas para estructurar una nueva solución factible básica. Una vez más que se determine la existencia de una mejor solución, se da lugar a otro intercambio y se repite el proceso. Se destaca que el método Simplex constituye un proceso iterativo o repetitivo, porque repite los pasos de solución hasta conseguir la solución del problema. El intercambio de variables se representa en la figura 4.3

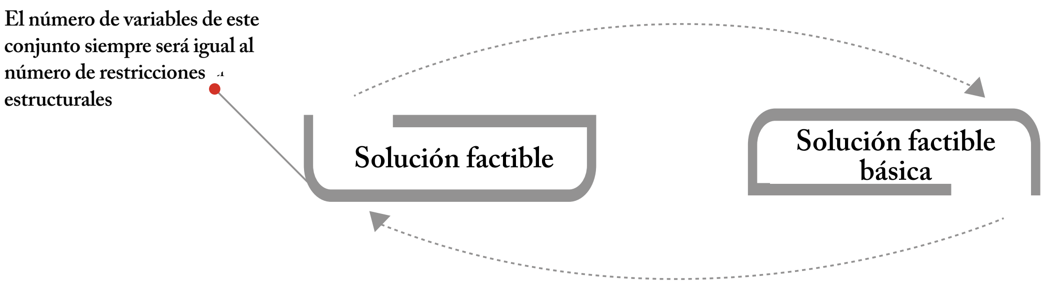


Figura 4.3. Intercambio de variables con el método Simplex   Fuente: Taha, (2004).

Se considera un ejemplo para la resolución a través del método simplex caso maximización.

$$Max\ Z = 6X_1 + 4X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

El primer paso que se debe realizar es transformar las inecuaciones en ecuaciones o igualdades. En el presente caso, al ser restricciones menor o igual que, se añaden variables de holgura

$$X_1 + 2X_2 + H_1 = 4$$
$$3X_1 + 2X_2 + H_2 = 8$$

El segundo paso es incorporar las variables de holgura en la función objetivo.

$$Max\ Z = 6X_1 + 4X_2 + 0H_1 + 0H_2$$

Se forma la primera tabla:

			6	4	0	0	Renglón
			X_1	X_2	H_1	H_2	objetivo
0	H_1	4	1	2	1	0	
0	H_2	8	3	2	0	1	
Columna objetivo	Zona de solución		Cuerpo		Parte identidad		

Tabla 4.2 Primera tabla MS

De las ecuaciones de las restricciones, se toman los coeficientes de las mismas para formar la primera tabla del método Simplex como se muestra en la tabla 4.2. Al agregar el renglón objetivo se incluyen los coeficientes de las variables. A estos coeficientes se les denomina también contribuciones.

A continuación, se genera el renglón índice restando la sumatoria de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento de la columna objetivo menos el elemento correspondiente a la columna del renglón objetivo.

Columna de X_1 Número índice = (0*1+0*3) – 6 = - 6

Columna de X_2 Número índice = (0*2+0*2) – 4 = - 4

Columna de H_1 Número índice = (0*1+0*0) – 0 = 0

Columna de H_2 Número índice = (0*0+0*1) – 0 = 0

Columna de contantes Número índice = (0*4+0*8) – 0 = 0

Con los cálculos realizados se procede a elaborar la nueva tabla Simplex

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1
		0	-6	-4	0	0

Tabla 4.3. Segunda tabla MS

La primera solución obtenida se la denomina solución básica inicial que para el caso de estudio, está dada por:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 4$	$X_1 = 0$
$H_2 = 8$	$X_2 = 0$
$Z = 0$	

Como se observa en la tabla 4.3 Simplex, la aproximación no es óptima en la primera solución, por lo cual se realiza el siguiente paso. La aproximación de la solución será óptima cuando en el renglón índice, no existan números negativos, en el ejemplo desarrollado existen dos números negativos. Evidenciando que la respuesta inicial puede ser mejorada en las iteraciones subsiguientes. Las variables básicas serán iguales al número de restricciones que en el ejemplo son dos.

El siguiente paso dentro del método simplex es mejorar la aproximación anterior, para lo cual se debe terminar la columna de trabajo o columna clave, la misma que se seleccionará en función del número índice más negativo (en caso de empate se selecciona al azar). Para el ejemplo la columna clave será la correspondiente a X1 pues posee el índice más negativo en el renglón índice (- 6) como se muestra a continuación:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1
		0	-6	-4	0	0
		Columna Constante	Columna de trabajo			

Tabla 4.4 Selección reglón índice

Para identificar el renglón clave, se toman los coeficientes de la columna constante y se divide para el número que corresponda de la columna de trabajo; de estos resultados, se selecciona el menor de los cocientes que, para el caso de estudio, es el segundo renglón.

$$\frac{4}{1} = \mathbf{4}$$

$$\frac{8}{3} = \mathbf{2{,}667}$$

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1
		0	-6	-4	0	0

El segundo renglón servirá como la fila guía (ver tabla 4.5). El cruce entre la columna de trabajo y la fila de trabajo será el número clave (pivote), el cual debe ser convertido en 1. Así al dividir los coeficientes del renglón clave para el valor del número pivote, en el presente caso,3,se obtiene:

2,667	1	0,0667	0	0,333

Los valores obtenidos se reemplazan en la fila guía, además sale la variable H2 y en su reemplazo ingresa X1 que corresponde a la variable de la columna de trabajo.

A continuación, se debe convertir en cero el resto de coeficientes de la columna clave, lo cual se logra sumando o restando un determinado número de veces los coeficientes del renglón clave, este procedimiento se conoce como reducción de Gauss. (Izar, 2012)

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
6	X_1	2,667	1	0,667	0	0,33
		0	-6	-4	0	0

Al primer renglón, se le resta la fila guía.

	4	1	2	1	0
-	2,667	1	0,667	0	0,33
	1,33	0	1,33	1	-0,33

En este caso, al renglón índice se le suma la fila guía multiplicado por 6.

	0	-6	-4	0	0
-6	(2,667	1	0,667	0	0,33)
	16	0	0	0	2

Con los renglones calculados, se procede a construir la nueva tabla Simplex.

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	1,33	0	1,33	1	-0,33
6	X_1	2,667	1	0,667	0	0,33
		16	0	0	0	2

Esta aproximación ya es óptima por cuanto, en el renglón índice, no existe ningún número negativo, siendo la solución:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 1,333$	$H_2 = 0$
$X_1 = 2,667$	$X_2 = 0$
$Z = 16$	

El valor de Max Z equivale a 16, considerando que la variable X_1 debe tener un valor de 2,667, y H_1 como una variable de holgura con un valor de 1,33. Es importante indicar que siempre una variable no básica tenga en la tabla Simplex final como coeficiente del renglón índice un cero, representa la existencia de varias soluciones alternativas.

4.7. Minimización con método Simplex

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 5$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Los casos de minimización también se resuelven con el método Simplex, con algunas variaciones. En estos casos, las variables de holgura se incorporan con el coeficiente -1 y variables artificiales con coeficiente +1

• Función objetivo

$Min\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n + 0H_1 + 0H_2 + \dots + 0H_n + MF_1 + MF_2 + \dots + MF_n$ (4.4)

• Introducción variables de holgura y artificiales

$H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ = variables de holgura

$F_1, F_2, F_3, \dots, H_n$ = variables artificiales

$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n - H_1 \quad + F_1 = B_1$

(4.3)

$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2n}X_n \quad - H_2 + F_2 = B_2$

$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \dots + A_{mn}X_n \quad - H_n + F_n = B_n$

Con los siguientes datos, se procede a resolver un caso de minimización con método Simplex.

Se genera el renglón índice que para el caso de minimización como se muestra en la figura 4.4.

$$Min\ Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 5$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 6$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Las desigualdades se transforman en igualdades, añadiendo las variables de holgura con coeficiente -1 y las variables artificiales con coeficiente +1

$$2X_1 + X_2 + X_3 - H_1 + F_1 = 5$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 - H_2 + F_2 = 6$$

Se procede a incluir las variables de holgura y artificiales a la función objetivo,de acuerdo a la teoría antes expuesta.

$$Min\ Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 0H_1 + 0H_2 + MF_1 + MF_2$$

El siguiente paso es estructurar la primera tabla Simplex.

			8	7	9	0	0	M	M	Renglón objetivo
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2	
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	1	
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1	
Columna objetivo	Zona de solución	Cuerpo						Parte identidad		

Se genera el renglón índice que para el caso de minimización como se muestra en la figura 4.4.

$$\text{Número índice} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Elemento} \\ \text{correspondiente a la} \\ \text{columna en la región} \\ \text{objetivo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Sumatoria de los productos de} \\ \text{los elementos de la columna} \\ \text{por el respectivo elemento de} \\ \text{la columna objetivo} \end{array} \right\}$$

Figura 4.4. Fórmula para calcular renglón índice

Aplicando la fórmula se obtiene

Columna de X_1 Número índice = 8 – (M*2 + M*1) = 8 – 3M

Columna de X_2 Número índice = 7 – (M*1 + M*2) = 7 – 3M

Columna de X_3 Número índice = 9 – (M*1 + M*2) = 9 – 3M

Columna de H_1 Número índice = 0 – (M*-1 + M*0)= M

Columna de H_2 Número índice = 0- (M*0 + M*-1) = M

Columna de F_1 Número índice= M- (M*1 + M*0) = 0

Columna de F_2 Número índice= M- (M*0 + M*1) = 0

Columna de contantes Número índice = 0 – (M*5+M*6) = - 11 M

El renglón índice se descompone en dos, la parte numérica y la parte M

			8	7	9	0	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	0
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1
		0	8	7	9	0	0	0	0
			-3	-3	-3	1	1	0	0

Se omite -11M correspondiente a la columna de constantes, dando así la primera solución.

Variables básicas	Variables no básicas
$F_1 = 5$	$X_1 = 0$
$F_2 = 6$	$X_2 = 0$
$Z = 0$	$H_1 = 0$
	$H_2 = 0$

Esta aproximación no es óptima, debido a que en el renglón índice establecido mediante la fórmula de la figura cuatro aún existen número negativos; por lo tanto, se procede al siguiente paso.

Existe empate entre tres números del renglón guía, se selecciona arbitrariamente o al azar la columna encabezada por X_2.

			8	7	9	0	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	0
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1
		0	8	7	9	0	0	0	0
			-3	-3	-3	1	1	0	0

Se calculan los cocientes de los renglones de las restricciones para determinar cuál será la fila guía, dando como resultado: 5 y 3. Seleccionamos el de menor valor siendo la fila guía el segundo renglón, donde el elemento pivote es 2, se procede a dividir dicho renglón entre 2.

$$\frac{6}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{1}{2}$$

Luego de realizar la división, el resultado es el siguiente:

3	0,5	1	1	0	-0,5	0	0,5

La variable saliente es F_2 se introduce entonces la variable X_2 y su coeficiente respectivo.se elimina la columna F_2 debido a que corresponde a la variable saliente y además es una variable artificial.

A cada uno de los renglones, se resta o suma el renglón guía las veces que sean necesarias para que los elementos de la columna clave se conviertan en 0, quedando la nueva tabla de la siguiente manera:

			8	7	9	0	0	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1
M	F_1	2	5,1	0	0	-1	0,5	1
7	X_2	3	0,5	1	1	0	-0,5	0
		-21	4,5	0	2	0	3,5	0
			-1,5	0	0	1	-0,5	0

La nueva solución es:

Variables básicas	Variables no básicas
$F_1 = 2$	$X_1 = 0$
$X_2 = 3$	$X_3 = 0$
$Z = 21$	$H_1 = 0$
	$H_2 = 0$

No se considera el signo negativo de 21 que aparece en la tabla Simplex, debido a que la metodología presenta signo invertido para indicar que se trata de un caso de minimización. Observando en la tabla Simplex aún existen número negativos, por lo que se repite el proceso para encontrar una nueva solución.

La nueva columna guía está representado por el número más negativo que en este caso representa la columna encabezado por X_1, se elimina la variable ficticia F1, al repetir el proceso anterior se obtiene la siguiente solución Simplex.

			8	7	9	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2
8	X_1	1,333	1	0	0	-0,667	0,333
7	X_2	2,333	0	1	1	0,333	-
		-27	0	0	2	3	2
			0	0	0	0	0

La parte M del renglón guía desaparece pues todos sus elementos son 0; ya no hay ninguna variable artificial en la zona de solución, y la parte numérica de dicho renglón no contiene números negativos. La solución óptima de minimización de costos es la siguiente:

Variables básicas	Variables no básicas
X1 = 1,333	X3= 0
X2 = 2,333	H1= 0
Z = 27	H2= 0

4.8. Casos especiales de método Simplex

Desempate

- Empate en la columna clave (variable que entra): en este caso se seleccionará al azar cualquier columna. La única afectación posible es el número de iteraciones que van a realizarse en la resolución del problema.

- Empate en el renglón clave (variable que sale): en este caso, existen reglas para determinar cuál renglón será elegido como clave. Sin embargo, para fines prácticos, es recomendable seleccionar al azar.

No hay variables básicas de salida

Sucede cuando todos los elementos de la columna clave son menores o iguales que cero. En este caso, Z podría ser infinita o negativa; de ahí el nombre de problemas de Z no acotada. Estas condiciones suelen surgir por errores en el planteamiento del problema o en el cálculo durante la resolución del mismo.

Términos negativos en el segundo miembro

En el caso de términos negativos en las restricciones, se multiplica a ambos lados de la inecuación con el coeficiente -1, el signo de la desigualdad será el contrario ejemplo:

$$-5X + 3Y \geq -3$$
$$X - 2Y \leq -6$$

Al multiplicar ambos lados con el coeficiente -1 las inecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$5X - 3Y \leq -3$$
$$-X + 2Y \geq -6$$

Y, de esta manera, pueden ser resueltas con el método Simplex de la forma tradicional.

Soluciones óptimas alternativas

Se originan cuando la función objetivo es paralela a una de las restricciones que coincide con la dirección de la optimización. Al usar método Simplex, se presentan soluciones óptimas cuando:

- Se ha identificado una solución óptima.
- El coeficiente de la fila (0) para una variable no básica es igual a cero.

Cuando se presentan soluciones óptimas alternativas por el método Simplex, las otras alternativas del punto vértice óptimo pueden generarse al tratar la variable no básica con coeficiente cero como si fuera una nueva variable básica (Budnick. 2007).

Carencia de solución factible

Un problema no tiene solución factible si no existen valores de las variables que satisfagan las restricciones, esta situación se identifica en la tabla del método Simplex, cuando se llega a la solución óptima y aún existen variables artificiales en la zona de solución.

Precios sombra

La solución de un problema de programación lineal se basa en ciertas suposiciones y estimaciones. Una vez que se obtiene una solución, debe ser analizada con cuidado a la luz de estas suposiciones y estimaciones. Esta fase del proceso de solución se llama análisis de post optimización. Un tipo importante de análisis posterior a lo óptimo es el examen de precios sombra.

Un precio sombra representa la cantidad que el valor óptimo de la función objetivo cambiaría si el lado derecho de una restricción aumentara en una unidad.

Muchas de las restricciones son de tipo ≤, lo cual representa recursos limitados, y a menudo se considera que los precios sombra representan el valor económico de tener una unidad adicional de un recurso.

4.9. Ejercicios de aplicación

1. El método Simplex es un procedimiento matricial iterativo basado en la metodología de Gauss Jordan para manejar variables negativas, que permite solucionar problemas de un número elevado de variables y restricciones de una manera ágil y eficiente.

Verdadero _____ Falso _____

2. Se tiene la siguiente restricción: $9X_1 + 4X_2 \geq 4{,}5$. Aplique la regla respectiva para convertir la desigualdad de la restricción en igualdad mediante la incorporación de variables.

3. Se tiene la siguiente función objetivo Max $Z = 20X_1 + 34X_2$, con tres restricciones según las cuales se incorporaron dos variables de holgura y dos variables artificiales. Incluya dichas variables en la ecuación de la función objetivo con los coeficientes respectivos.

4. Dada la siguiente información, resuelva el problema de programación lineal basandose en el método Simplex.

$$\text{Max } Z\, X = 4X_1 + 3X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 200 \\ X_2 &\leq 350 \\ X_1+X_2 &\leq 400 \\ 2X_1+X_2 &\leq 500 \\ X_1,X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Industrias S.A fabrica tres productos X, Y, Z. Cada uno requiere el uso del tiempo en los centros de maquinado 1 y maquinado 2.

	Centro de maquinado 1	Centro de maquinado 2
Producto X	1h	1h
Producto Y	2h	1h
Producto Z	2h	2h

El número de horas por semana para el primer centro es de 40 y para el segundo de 50. La utilidad por unidad de X, Y, Z es de 50 USD, 60 USD, 75 USD, respectivamente. La siguiente semana deben producirse al menos cinco unidades de Z. ¿Cuál debe ser el plan de producción para que en la semana alcance la máxima utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima obtenida?

6. Se producen dos tipos de artículos C y D, para su producción requieren de tres procesos, para cada uno de los cuales se dispone de 130, 190 y 200 horas semanales. El primer proceso genera una unidad del artículo C y una unidad del D, el proceso número dos procesa dos de C y una de B, el tercer proceso produce una de C y cuatro de B. El costo de procesar es de 2 USD, por unidad del artículo C y 3 USD, por cada unidad del artículo D.

¿Cuál debe ser la combinación correcta para tener un costo mínimo de producción?

7. Resuelva el siguiente problema de programación lineal a través del método Simplex.

$$Max\ Z = X_1 + 9X_2 + X_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leq 9 \\ 3X_1 + 2X_2 + 2X_3 &\leq 15 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

8. Alejandro es dueño de una granja de 45 ha. En ellas siembra maíz y trigo. Cada hectárea sembrada con trigo rinde de utilidad 201 USD, mientras que una hectárea de maíz genera 300 USD de utilidad. En la granja se cuenta con 100 trabajadores y 120 toneladas de fertilizante.

Los requerimientos de mano de obra para cada hectárea de trigo corresponden a tres trabajadores y dos trabajadores para la siembra de maíz., en lo referente al fertilizante utilizado por cada hectárea dos toneladas para trigo y cuatro toneladas para maíz. Utilizando el método simplex determine cómo debe combinar la siembra para que Alejandro maximice sus utilidades en la granja.

9. Considere el siguiente problema:

$$Max\ Z = 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 - 6X_4$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 8X_4 &\leq 2 \\ -X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 &\leq 1 \end{aligned}$$

10. Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante método Simplex.

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 200 \\ X_2 &\leq 350 \\ X_1 + X_2 &\leq 400 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 500 \\ X_1, X_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

11. Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante método Simplex.

$$Max\ Z = 900X_1 + 1500X_2 + 2200X_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 6X_1 + 9X_2 - 8X_3 &\leq 1600 \\ 8X_1 + 11X_2 + 16X_3 &\leq 1920 \\ 3X_1 + 4X_2 + 10X_3 &\leq 1180 \\ X_1, X_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

5. MODELO DE TRANSPORTE

Objetivo:

Proporcionar una perspectiva general de cómo resolver planes óptimos de envío para problemas de transporte.

5.1. Introducción

El modelo de transporte involucra el embarque de ciertos artículos o productos homogéneos desde diferentes orígenes hacia varios destinos.

Cada uno de los orígenes representa la fuente de suministros del artículo o producto, cada destino representa el punto de demanda. El modelo de distribución (método de transporte) es un conjunto importante del problema de optimización de redes, ha sido aplicado al control y diseño de plantas de fabricación, determinación de territorios de venta, localización de centros de distribución y almacenaje. A este método suele nombrarse como de transporte por la similitud existente con el planteamiento de problemas de fletar mercaderías desde los sitios de producción hasta los lugares de consumo (Izar, 2012).

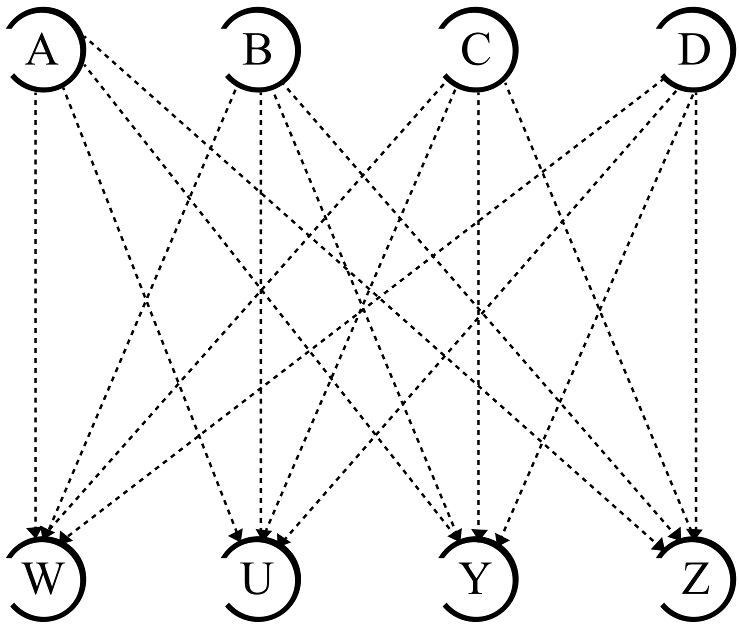
5.2. Planteamiento del problema de transporte

Al plantear un problema de transporte se toman en consideración los orígenes y los destinos, considerando tanto la oferta como la demanda, co nsiderando la igualdad entre ellas. El costo de envío de cada centro de suministro se representa por Cij, donde el subíndice i representa el punto de origen o suministro y el subíndice j el punto de consumo.

La función objetivo será el costo total de los envíos, definiéndose con la siguiente ecuación:

$$MinZ = \sum_{\substack{i=1,m \\ j=1,m}} C_{ij} X_{ij} \tag{5.1}$$

Centro de suministros



Centro de consumo

Figura 5.1. Diagrama del modelo de transporte Fuente: Chase, Jacobs y Aquilano, (2009).

Donde:

C_{ij} = costo de enviar una unidad de mercancía del centro de suministro i al centro de consumo j.

X_{ij} = número de unidades de mercancía que se enviarán del centro de suministro i al centro de consumo j.

m = número de centros de suministros.

n = número de centro de consumo.

El problema de transporte puede enunciarse de la siguiente manera: hay un número m de orígenes y un número n de destinos; se trata de transportar al menor costo posible determinadas cantidades de los artículos, mercaderías, etc, entre orígenes y destinos. Tanto la oferta como la demanda deben ser iguales. Las variables de decisión deben iguales o mayores a 0 y cuyos coeficientes en las restricciones serán la unidad.

Para calcular el número de variables en el caso de transporte se multiplica m * n, que, en el caso de la figura 5.1, correspondería a un problema de programación lineal de 16 variables y ocho restricciones, lo cual resulta muy laborioso para su resolución mediante método Simplex.

El algoritmo de transporte es muy sencillo, pues constituye una matriz de distribución que, en cada fila, se asignan los centros de suministros (oferta), y en cada columna los centros de consumo (demanda) como se observa en la tabla 5.1. Al final, tanto de las columnas y filas, se colocará el total de la oferta y demanda correspondiente.

Demanda / Oferta	**A**	**B**	**C**	**D**	**Oferta**
1	C_{1A}	C_{1B}	C_{1C}	C_{1D}	P1
2	C_{2A}	C_{2B}	C_{2C}	C_{2D}	P_2
3	C_{3A}	C_{3B}	C_{3C}	C_{3D}	P_3
4	C_{4A}	C_{4B}	C_{4C}	C_{4D}	P_4
Demanda total	d_A	d_B	d_C	d_D	D / P

Tabla 5.1 Matriz de distribución de transporte
Fuente: Izar ,(2012).

5.3. Clasificación de los métodos de transporte

Existen diferentes métodos de transporte entre los cuales se pueden destacar:

Métodos de inicialización

- Método de la esquina noroeste
- Método del costo menor
- Método mutuamente preferente
- Método Voguel
- Método de Russel

- Método de optimización.
- Método del cruce del arroyo
- Método MODI

5.4 Métodos de inicialización

5.4.1 Método de la esquina noroeste

El método de la esquina noroeste es el más sencillo para lograr la distribución inicial, es el menos recomendado, pues el costo de la matriz inicial es muy elevado. Los pasos para desarrollar este método son los siguientes:

- Se inicia la distribución por la casilla de la esquina noroeste de la tabla, asignándole el máximo que sea posible. Se selecciona el número menor entre oferta y demanda que corresponda a la casilla, para satisfacer la oferta o la demanda. Al renglón o columna que haya sido satisfecho, se le asignarán ceros, para que la sumatoria de la oferta o la demanda no se altere, creándose así una tabla de menor tamaño.
- En la matriz que no tiene asignación en el paso anterior, se localiza la nueva casilla noroeste y se repite el paso anterior.
- Se repite todo el procedimiento anterior hasta que toda la tabla tenga una asignación.

Este método de esquina noroeste corresponde a un método matricial del método Simplex. Para determinar cuántos envíos se realizarán desde cada origen hacia cada destino se aplica la siguiente fórmula:

$$\text{Número de envíos} = m + n - 1$$

Donde:

m constituye el número de filas.

n el número de columnas.

Ejercicio 5.1

Neymatex cuenta con tres centros de distribución y cuatro centros de consumo.En la tabla 5.2, se establece disponibilidad en cada centro de distribución y la demanda existente en cada centro de consumo.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4	6	5	2	12
2	3	7	4	5	17
3	6	5	2	7	9
Demanda	6	7	11	14	38

Tabla 5.2. Matriz inicial de transporte

De acuerdo al procedimiento, se selecciona la esquina noroeste, que, para este caso, lo representa la casilla 1A, la cual tiene una oferta de 12 y una demanda de 6. De ambos valores ,seleccionamos el menor, es decir 6, con lo cual quedará satisfecha la demanda, al resto de casillas de la primera columna se asigna 0, como se muestra en la siguiente tabla

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 6	6 6	5 X	2 X	6-6=0
2	3 X	7	4	5	17
3	6 X	5 X	2 X	7	9
Demanda	0	7-6=1	11	14	

Tabla 5.3

Las X que aparecen en la columna representan que dichas casillas han sido asignadas con cero unidades de envío. En este caso, la nueva esquina noroeste es la casilla 1B.En la oferta con seis unidades y en la demanda con siete, seleccionar el menor valor; en este caso,6, quedando satisfecho el primer renglón.La segunda columna aún falta satisfacer en una unidad de envío, por lo cual la nueva esquina noroeste es 2B, como se muestra en la tabla 5.3. Con esto se da origen a una nueva tabla de asignación, el máximo de 2B corresponde a 1.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 6	6 6	5 X	2 X	0
2	3 X	7 1	4 11	5	16-11=5
3	6 X	5 X	2 X	7	9
Demanda	0	0	11-11=0	14	

Tabla 5.4

Como se muestra en la tabla 5.4, la columna B ha sido satisfecha su asignación, la nueva esquina noroeste corresponde a la casilla 2C, siendo el máximo asignable 11 unidades, quedando satisfecha la demanda de la columna C.

Se genera la nueva tabla de transporte, identificando la esquina noroeste correspondiente a la casilla 2C, cuyo máximo asignable equivale a cinco unidades, quedando satisfecho el segundo renglón como se demuestra en la tabla 5.5.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 6	6 6	5 X	2 X	0
2	3 X	7 1	4 11	5 5	5-5=0
3	6 X	5 X	2 X	7	9
Demanda	0	0	0	14-5=9	

Tabla 5.5

De acuerdo a la tabla 5.5, la nueva esquina noroeste corresponde a la casilla 3C, cuyo máximo asignable es 9.

D / O	A	B	C	D	Oferta
1	4 / 6	6 / 6	5 / X	2 / X	0
2	3 / X	7 / 1	4 / 11	5 / 5	5-5=0
3	6 / X	5 / X	2 / X	7 / 9	9-9=0
Demanda	0	0	0	9-9=0	0

Tabla 5.6

Aplicando la fórmula 5.2 se determina que en el presente ejemplo, se realizarán seis envíos como se evidencia en la tabla 5.6.

Para determinar el costo mínimo, se aplica la siguiente fórmula:

$$C_T = X_{1A}C_{1A} + X_{1B}C_{1B} + X_{2B}C_{2B} + X_{2C}C_{2C} + X_{2D}C_{2D} + X_{3D}C_{3D}$$

$$C_T = 6 * 4 + 6 * 6 + 1 * 7 + 11 * 4 + 5 * 5 + 9 * 7$$

$$C_T = 199 \text{ USD.}$$

El costo total de distribución de 38 toneladas desde tres puntos de distribución hacia cuatro puntos de consumo es de 199 USD.

5.4.2. Método del costo menor

Este método de inicialización es más eficiente que el de la esquina noroeste, pues va asignando el menor costo de entre las casillas; de ahí su nombre. Cabe mencionar que este método no siempre logra tener la solución óptima.

Su procedimiento se detalla a continuación:

1. Analizar la primera columna y, sobre ella, localizar la casilla que tenga el menor costo, al cual se asignará el máximo posible de tal manera que se satisfaga la oferta o demanda. En el caso de que la primera columna no quedara satisfecha con la asignación, se procede de la misma manera hasta que la columna quede totalmente satisfecha.

2. Se continúa con la segunda columna repitiendo el procedimiento anterior.

3. Se procede con el resto de columnas hasta la última de la tabla, con lo cual la distribución inicial quedará totalmente satisfecha.

Utilizando el ejercicio 5.1, se procede a resolver la asignación de transporte mediante el menor costo.

O \ D	**A**	**B**	**C**	**D**	**Oferta**
1	4	6	5	2	12
2	3	7	4	5	17
3	6	5	2	7	9
Demanda	6	7	11	14	38

Tabla 5.7

El menor costo de la primera columna es 3 USD correspondiente a la casilla 2A; a dicho renglón, se asigna el máximo posible, que en este caso es seis unidades.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6	5	2	12
2	3 6	7	4	5	17
3	6 X	5	2	7	9
Demanda	6	7	11	14	

Tabla 5.8.

Como la primera columna ha sido satisfecha, se busca el menor costo en la segunda columna, siendo este 5, correspondiente a la casilla 3B, el máximo asignable a este costo es de siete unidades. De esta manera, queda satisfecha la demanda de la columna B.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5	2	12
2	3 6	7 X	4	5	11
3	6 X	5 7	2	7	2
Demanda	0	0	11	14	

Tabla 5.9.

Continuando con el proceso se identifica el menor costo en la tercera columna, que corresponde a la casilla 3C con un costo de 2 USD; el máximo asignable de unidades es de 2 como se muestra en la tabla 5.10.

D / O	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2	12
2	3 6	7 X	4 9	5	2
3	6 X	5 7	2 2	7 X	0
Demanda	0	0	0	14	

Tabla 5.10.

En la cuarta columna, determinamos el menor costo posible, correspondiente a la casilla 1D con un costo de 2 USD, asignándole 12 unidades como se muestra en la tabla 5.11

D / O	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7 X	4 9	5	2
3	6 X	5 7	2 2	7 X	0
Demanda	0	0	9	2	

Tabla 5.11.

Continuar con la última asignación que corresponde a la casilla 2D con un costo de 5 USD, con dos unidades, por lo cual se satisface la demanda y la oferta

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7 X	4 2	5 2	0
3	6 X	5 7	2 9	7 X	0
Demanda	0	0	0	0	

Tabla 5.12.

5.4.3. Método mutuamente preferente

Selecciona las casillas de menor costo bajo el criterio de que sean a la vez las más bajas del renglón y la columna a la que pertenece.

1. Identificar las casillas que tengan el costo mínimo, tanto en el renglón, como en la columna a la que pertenece.

2. Asignar a las casillas la cantidad máxima posible para satisfacer sea la oferta o la demanda.

3. El resto de la tabla se va asignando repitiendo los pasos anteriores.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4	6	5	2	12
2	3	7	4	5	17
3	6	5	2	7	9
Demanda	6	7	11	14	38

Tabla 5.13.

Seleccionamos el menor que, en este caso, es 1D, y se asignan 12 unidades. También cumple la casilla 3C la condición establecida por este método.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3	7	4	5	17
3	6	5	2	7	9
Demanda	6	7	11	2	

Tabla 5.14.

En este caso, seleccionamos 3C, asignando nueve unidades como se muestra en la tabla 5.15.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3	7	4	5	17
3	6 X	5 X	2 9	7 X	0
Demanda	6	7	2	2	

Tabla 5.15

El siguiente costo menor corresponde a la casilla 2A, a la cual se asignan seis unidades.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7	4	5	11
3	6 X	5 X	2 9	7 X	0
Demanda	6	7	2	2	

Tabla 5.16.

A continuación, se selecciona la casilla 2C, asignando dos unidades.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7	4 2	5	9
3	6 X	5 X	2 9	7 X	0
Demanda	0	7	0	2	

Tabla 5.17.

El siguiente costo que se va a considerar es la casilla 2D, del cual asignamos dos unidades como se muestra en la tabla 5.18.

El siguiente costo que se va a considerar es la casilla 2D, del cual asignamos dos unidades como se muestra en la tabla 5.18.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7	4 2	5 2	7
3	6 X	5 X	2 9	7 X	0
Demanda	0	7	0	0	

Tabla 5.18.

El último costo que va a ser asignado corresponde a la casilla 2B, con siete unidades y de esta manera de satisface tanto oferta como demanda., como se muestra en la tabla 5.19.

O \ D	A	B	C	D	Oferta
1	4 X	6 X	5 X	2 12	0
2	3 6	7 7	4 2	5 2	0
3	6 X	5 X	2 9	7 X	0
Demanda	0	0	0	0	

Tabla 5.19.

Con este método se realizarán cinco envíos cuyo costo total es de 117 USD, que es menor que el costo total calculado con la esquina noroes

5.5. Métodos de optimización

5.5.1 Método del cruce del arroyo

El método del cruce del arroyo, también denominado algoritmo de Stepping–Stone (Izar, 2012), es un método de programación lineal que consiste en calcular cuál sería la variación del costo del envió de una unidad de cierto producto por cada una de las rutas posibles, es decir asignar cierta cantidad de artículos desde varios orígenes (fábricas) a un conjunto de destinos (clientes) de tal manera que se disminuyan los costos, hasta optimizar la función objetivo. Dada una distribución inicial que cumpla la condición de no degeneración2, se podrá optimizar el problema de transporte, evaluando cada casilla vacía del recorrido cerrado correspondiente, el cual consiste en asignar unidades a las casillas vacías, trasladándolas de una casilla determinada que sea de la misma columna o renglón, de manera que sigan cumpliéndose las igualdades de la suma de asignaciones de las casillas por renglón de la oferta del mismo y la suma de asignaciones de las casillas por columna de la demanda. La distribución será óptima cuando los recorridos cerrados para el total de casillas vacías resulten mayores o iguales a cero, es decir; ninguna resulte negativa.

Dado el siguiente ejemplo de la tabla 5.20 de transporte, obtener una distribución normal aplicando la esquina noroeste para la distribución inicial y el método del cruce del arroyo para la optimización.

O \ D	A	B	C	**Oferta**
1	24	18	21	7500
2	23	20	19	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Fuente: Izar, (2012) Tabla 5.20. Distribución de transporte

[2] Degeneración en matemáticas es un caso límite en el cual una clase de objeto cambia su naturaleza para aproximarse mucho a un objeto de otra clase, normalmente, más simple (Budnick, 2007).

De acuerdo con la metodología de la esquina noroeste, la tabla 5.21 de distribución inicial será:

O \ D	A	B	C	**Oferta**
1	24 6000	18 1500	21	7500
2	23	20 3000	19 3500	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.21. Distribución inicial de transporte

Con un costo total de 297 500 USD

Como se observa en la tabla 5.21, el número de casillas asignadas es cuatro. Entonces se procede a evaluar los valores de los recorridos cerrados de las dos casillas vacías.

Casillas 1C: para enviar una unidad a esta casilla puede tomarse de la casilla 1B, descompensando las columnas B y C, lo cual se equilibra si se envía una unidad de la casilla 2C a la casilla 2B como se muestra en la tabla 5.22.

O \ D	A	B	C	**Oferta**
1	24 6000	18 1499	21 1	7500
2	23	20 3001	19 3499	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.21. Distribución inicial de transporte

En la tabla 5.22, tanto renglones como columnas están equilibrados en función de la oferta y la demanda. El valor del recorrido se estima de la siguiente manera: al enviar una unidad a la casilla 1C, el costo se elevará en 21 USD, pero dicha unidad se ha tomado de la casilla 1B y el costo del movimiento disminuye en 18 USD; a la casilla 2B se le incrementa una unidad con un costo de 20 USD; esa unidad fue tomada de la casilla 2C, representando una disminución en el costo de 19 USD; por lo tanto, el recorrido cerrado para la casilla 1C:

En la tabla 5.22, tanto renglones como columnas están equilibrados en función de la oferta y la demanda. El valor del recorrido se estima de la siguiente manera: al enviar una unidad a la casilla 1C, el costo se elevará en 21 USD, pero dicha unidad se ha tomado de la casilla 1B y el costo del movimiento disminuye en 18 USD; a la casilla 2B se le incrementa una unidad con un costo de 20 USD; esa unidad fue tomada de la casilla 2C, representando una disminución en el costo de 19 USD; por lo tanto, el recorrido cerrado para la casilla 1C:

Recorrido cerrado: 21-18+20-19 = 4

Por lo tanto, si se efectúan los movimientos involucrados en dicho recorrido, el costo total aumentará en cuatro unidades monetarias por cada unidad de mercancía reasignada. El mismo procedimiento se aplica para la casilla 2A dando como resultado la tabla 5.23.

O \ D	A	B	C	**Oferta**
1	24 5999	18 1501	21	7500
2	23 1	20 2999	19 3500	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.23. Valores recorridos cerrados casilla 2A

El valor del recorrido de la tabla 5.23 se evalúa sumando los costos de las casillas que aumentaron su asignación y restando el costo de las casillas que disminuyeron.

Recorrido cerrado = 23 + 18 – 24 – 20 = -3

Es decir, al reasignar una unidad de acuerdo al recorrido cerrado, el costo disminuirá en 3 USD. Por lo tanto, debe hacerse el cambio de unidades conforme al recorrido cerrado 2A, quedando la reasignación de la siguiente manera como se muestra en la tabla 5.24.

Para determinar el número de unidades conforme al recorrido cerrado, conviene mover tantas veces como sea posible, dado que cada unidad reasignada disminuirá el costo en 3 USD. En este caso, las casillas donadoras son 1A y 2B (6000 y 3000), se toma el último valor como la cantidad de unidades a reasignarse. Con este cambio la tabla queda de la siguiente manera:

D / O	A	B	C	**Oferta**
1	24 3000	18 4500	21	7500
2	23 3000	20 2999	19 3500	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.24. Redistribución de recorrido

Costo total = 288 500 USD

Con este método la distribución actual ha disminuido respecto a la anterior en 9000 USD. Dicha cantidad también puede ser obtenida a partir de que una unidad que se mueve en el recorrido cerrado disminuye el costo en tres unidades; como se reasignaron 3000 unidades, el costo disminuye en 9000 USD.

5.5.2. Método MODI

MODI, conocido como el método de los costes ficticios, consiste en añadir a la matriz de costos una fila y una columna que recogen costos ficticios determinados arbitrariamente (los números MODI), tal que permite calcular los índices de mejora para las celdas (casillas) no utilizadas. Se aplica la siguiente fórmula:

$$r_1 + C_{ij} + k_j = 0 \qquad (5.3)$$

Donde:

r1 = coeficiente r para el renglón i.

Cij = costo de la casilla asignada ubicada en el renglón i y la columna j.

Kj = coeficiente k para la columna j.

O \ D	A	B	C	**Oferta**
1	24 3000	18 5500	21	7500
2	23 3000	20	19 3500	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.25. Distribución inicial de transporte

De acuerdo a la tabla 5.25. se tomará en consideración como incógnitas cinco coeficientes r_1, r_2, k_1, k_2 y k_3, de los cuales se selecciona al azar uno de ellos. En este caso se considerará r1 y se le asigna un valor arbitrario de cero. Al aplicar la ecuación 5.2 a las cuatro casillas asignadas, para determinar las restantes r_i, k_j,

Casilla 1A

$$r_1 + C_{1A} + k_A = 0$$
$$0 + 24 + k_A = 0$$
$$0 + k_A = -24$$

Casilla 1B

$$r_2 + C_{1B} + k_b = 0$$
$$0 + 18 + k_B = 0$$
$$0 + k_B = -18$$

Casilla 2B

$$r_2 + C_{2B} + k_B = 0$$
$$r_2 + 20 - 18 = 0$$
$$r_2 = -2$$

Casilla 2C

$$r_2 + C_{2C} + k_C = 0$$
$$-2 + 19 + k_C = 0$$
$$k_C = -17$$

Ahora se obtiene el valor de $r_1 + C_{ij} + {}_{kj}$ para las casillas vacías

Casilla 1C

$$r_2 + C_{1C} + k_C$$
$$0 + 21 - 17 = +4$$

Casilla 2A

$$r_2 + C_{2B} + k_A$$
$$-2 + 23 - 24 = -3$$

Luego de realizados los cálculos, se establece que la tabla no es óptima, pues no todas las sumatorias de r1 + Cij + kj son mayores o iguales a cero, por lo cual se debe reasignar unidades en la casilla 2A, que ha tenido resultado negativo conforme al recorrido cerrado, para lo cual se deberá enviar una unidad a la casilla 1A y realizar las compensaciones necesarias, para lo cual se moverá 3000 unidades que dando la tabla de asignación de la siguiente manera:

O \ D	A	B	C	Oferta
1	24 6000	18 1500	21	7500
2	23	20 3000	19 3500	6500
Demanda	6000	4500	3500	14 000

Tabla 5.26. Distribución inicial de transporte

Con los datos de la tabla 5.26, se procede a recalcular los coeficientes ri y kj, al tomar de manera arbitraria una de ellas se consideró a kA,= 0, entonces se aplica la fórmula 5.3.

Casilla 1A

$$r_1 + C_{1A} + k_A = 0$$
$$r_1 + 2_4 + 0 = 0$$
$$r_1 = -24$$

Casilla 1B

$$r_1 + C_{1B} + k_B = 0$$
$$-24 + 18 + K_b = 0$$
$$k_B = 6$$

Casilla 2A

$$r_2 + C_{2A} + k_A = 0$$
$$r_2 + 23 + 0 = 0$$
$$r_2 = -23$$

Casilla 2C

$$r_2 + C_{2C} + k_C = 0$$

$$-23 + 19 + k_C = 0$$
$$k_C = 4$$

Ahora se obtiene el valor de $r_1 + C_{ij} + k_j$ para las casillas vacías

Casilla 1C

$$r_1 + C_{1C} + k_C$$
$$-24 + 21 + 4 = +1$$

Casilla 22

$$r_2 + C_{2B} + k_B$$
$$-23 + 20 + 6 = +3$$

Luego de realizados los cálculos, se observa que la distribución actual es óptima y su costo, con el método del arroyo, es de 288 500 USD.

5.6. Variantes del método de transporte

La condición de igualdad entre oferta y demanda en la vida práctica no siempre se da; es así, la producción excede a los requerimientos. Esto significa que la oferta es mayor que la demanda por lo cual se debe crear un cliente o un destino ficticio, al cual se asignará el exceso de producción. Lógicamente, los costos asignados a este destino imaginarios serán igual a cero. En el caso de que la demanda sea mayor que la oferta, se creará un origen imaginario y se procederá de igual manera de lo antes descrito.

5.7. Ejercicios propuestos

1. Una empresa dedicada a la distribución de aceite de oliva debe enviar 30 toneladas a Madrid, 40 a Barcelona, 20 a Valencia y 10 a Bilbao. Esta empresa suministra en Badajoz, Cáceres y Jaén, cuyas disponibilidades son de 35, 25 y 20 toneladas, respectivamente.

Por cada tonelada no recibida en los puntos de destino, la empresa tiene unas pérdidas de 5, 8, 6 y 4 USD, respectivamente. La empresa desea minimizar

	Madrid	Barcelona	Valencia	Bilbao	Oferta
Badajoz	10	15	20	9	35
Cáceres	7	10	15	25	25
Jaén	20	25	30	20	20
Demanda	30	40	20	10	

2. Una compañía de agua tiene tres depósitos con una entrada diaria estimada de 15, 20 y 25 millones de litros de agua respectivamente. Diariamente tiene que abastecer cuatro áreas A, B, C y D, las cuales tienen una demanda esperada de 8, 10, 12 y 15 millones de litros respectivamente.

El costo de bombeo por millón de litros de agua es como sigue:

	AREAS			
Depósitos	A	B	C	D
1	2	3	4	5
2	3	2	5	2
3	4	1	2	3

3. Se presenta a continuación la siguiente tabla. Se solicita que se determine el costo de transporte y la ruta que se debe seguir para optimizar los recursos.

	DESTINO 1	DESTINO 2	DESTINO 3	DESTINO 4	OFERTA TOTAL
ORIGEN 1	23	27	15	10	100
ORIGEN 2	25	30	40	19	300
ORIGEN 3	20	23	29	29	250
	100	90	60	200	

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, J. (2005). *Investigación de operaciones*. 2a. Lima: Librería Distribuidora Beta.

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para la administración, economía y ciencias sociales.* 4a. México: McGraw Hill

Chase, R. Jacobs, R. y Aquilano, N. (2009). *Administración de operaciones produccicón y cadena de suministros*. 12a. México: McGraw – Hill.

Erazo, J. (2007). *Investigación Operativa* Tomo I. Quito: EPN.

Izar, J. (2012). *Investigación de Operaciones*. 2a. México: Trillas.

Mathur, K. y Solow, D. (1996). *Investigación de operaciones*. México: Pearson.

Marín, A. y Maya, P. (2016). Modelo lineal para la programación de clases en una institución educativa. *Ingeniería y Ciencia*. 12 (23); p 47-71.

Martínez, I., López, F., y Vertiz, G. (2014). Investigación de Operaciones: Serie Universitaria Patria. México: Patria.

Rodríguez, R. y Aldana, F. (2012). Selección de una plataforma inteligente de negocios: un análisis multicriterio innovador. *Revista Ciencias Estratégicas*, 20 (28), 237-253.

Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. México: Pearson.

Thierauf, R. J. Grosse, R. A. (1976). *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*. México: Limusa.

La programación lineal, como elemento fundamental de la investigación de operaciones, ha logrado un importante desarrollo científico a escala mundial, pues es aplicable a cualquier empresa para solucionar problemas de optimización de sus recursos. Este libro es práctico, pues incluye casos de aplicación que permiten al lector utilizar de manera inmediata los conocimientos adquiridos. El contenido se basa en el aprendizaje significativo, ya que dispone de conceptos claves y casos prácticos desarrollados.

Mariana Isabel Puente Riofrío nace en Guano, Chimborazo, Ecuador. Ingeniera en Finanzas (Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador), mejor egresada de la carrera de Ingeniería Financiera, Diploma Superior en Proyectos y Transferencia de Tecnologías (Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador). Magíster en Pequeñas y Medianas Empresas mención Finanzas (Universidad Nacional de Chimborazo). Docente de amplia trayectoria en el área Financiera (Escuela Superior Politécnica de Chimborazo), Evaluadora Externa de Libros (Universidad Técnica de Ambato). Directora de tesis de programa de maestría en Finanzas.

Óscar Danilo Gavilánez Álvarez nace en Riobamba, Chimborazo, Ecuador (1975). Ingeniero en Sistemas (Escuela Superior Politécnica de Chimborazo - Ecuador), Magíster en Interconectividad de Redes (Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador), profesional de amplia trayectoria en el campo informático, experto en educación virtual, docente politécnico con desarrollada experiencia en tecnologías de la información, actualmente egresado del programa de Doctorado en Ingeniería de Sistemas e Informática en la Universidad Nacional San Marcos (Lima, Perú).

ISBN: 978-9942-30-840-5
9 789942 308405